UNIVERSIDAD DE
TALCA

FACE
Facultad de Ciencias Empresariales

Fundamentos de Economía Financiera

Pablo Morán Villar

N° 01. Año 4 Marzo 2006

La **Serie Documentos Docentes** (ISSN 0717-9537) es una publicación de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad de Talca (Chile)

Director: Germán Lobos Andrade Dirección: FACE - Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad de Talca, Av. Lircay s/n, Casilla 721, Talca, Chile. Teléfono: 56-71-200330, Fax: 56-71-201529. E-mail: globos@utalca.cl

Representante legal: Prof. Dr. Álvaro Rojas Marín, Rector Universidad de Talca. Dirección: 2 Norte 685, Talca, Chile.

Internet

Universidad de Talca (Chile): http://www.utalca.cl
Facultad de Ciencias Empresariales: http://face.utalca.cl/
College of Business Administration: http://digweb.utalca.cl/ingver/english%20version.htm
FACE Serie Documentos Docentes: http://www.face.utalca.sdd/

FACE SDD
Serie Documentos Docentes

Universidad de Talca
Dos Norte 685
Casilla 721 Talca CHILE
http://www.utalca.cl

Fundamentos de Economía Financiera

Pablo Morán Villar

No. 01 Año 4 Marzo 2006

Fundamentos de Economía Financiera[1]

Pablo Morán Villar

Universidad de Talca, Facultad de Ciencias Empresariales, Escuela de Contador Público y Auditor.

E-mail: pmoran@utalca.cl

RESUMEN. El propósito de esta nota docente es sintetizar los elementos teóricos básicos que subyacen a la determinación de la prima por riesgo de un activo. En este sentido, el documento no pretende ser una guía práctica sobre la estimación de lo que comunmente se entiende por tasa de descuento. Se presenta la teoría neoclásica de elección bajo incertidumbre y la teoría de carteras como pilares fundamentales del Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM, por su sigla en inglés). Finalmente, se discuten brevemente algunas extensiones y limitaciones de este modelo.

Palabras clave: incertidumbre, diversificación, prima por riesgo.

ABSTRACT. The purpose of this teaching note is to synthesize the basic theoretical elements underlying the determination of an asset risk premium. In this sense, the document is not intended to be a practical guide about the estimation of what is commonly understood as discount rate. The neoclassical theory of choice under uncertainty and the portfolio theory are presented as a bridge to the Capital Asset Pricing Model (CAPM). Finally, some extensions and limitations of the model are briefly discussed.

Key words: uncertainty, diversification, risk premium.

(Recibido: 15 de diciembre de 2005. Aceptado: 3 de marzo de 2006)

[1]El autor agradece los comentarios de Rodrigo Saens y la valiosa colaboración de José Manuel Gaete.

Índice general

Introducción

Este documento docente entrega los fundamentos teóricos elementales de economía financiera. El objetivo del documento es dual. Primero, se busca un tratamiento intermedio de los temas que permita generar un puente que haga más facil para el alumno la transición desde un texto básico a uno avanzado. Segundo, el tratamiento de los temas se realiza bajo un marco técnico común con la idea que el alumno comprenda con mayor facilidad de las lecciones derivadas de estos contenidos.

Partiendo de la raiz microeconómica de las finanzas, asumimos que el individuo deriva su bienestar del consumo de bienes y servicios. Sin embargo, las decisiones financieras requieren incorporar al análisis microeconómico clásico la incertidumbre y la dimensión temporal en las decisiones. A nivel personal, hay dos decisiones interrelacionadas que el individuo debe tomar: a) la decisión de ahorro y consumo hoy, y b) la decisión de inversión para los fondos destinados al financiamiento del patrón de consumo futuro (ahorro). Asumiremos que la primera decisión ya está tomada, y nos dedicaremos a entender la segunda decisión del individuo. Nuestro interés estará en entender los factores que determinan el tipo de activos financieros que el individuo comprará para materializar su inversión financiera.

El texto está organizado en tres capítulos. En el primer capítulo analizamos cómo la incertidumbre afecta las decisiones de inversión de los individuos. El segundo capítulo se orienta a exponer el efecto de la diversificación del riesgo, y como ésta afecta las decisiones de inversión de los individuos. El capítulo final se orienta a exponer los elementos centrales del equilibrio del mercado de capitales. Específicamente, se busca la comprensión de las variables que determinan la rentabilidad exigida a un activo riesgoso en equilibrio.

Capítulo 1: Elección bajo Incertidumbre

En este capítulo presentamos los fundamentos de la teoría de elección bajo incertidumbre. Los principios derivados de este desarrollo teórico son el insumo que nos permitirá determinar una variable clave en finanzas: el precio de mercado del riesgo. En este capítulo damos el primer paso para entender esta variable clave.

Es incuestionable que muchas decisiones que tomamos hoy están plagadas de incertidumbre. En particular, las decisiones tomadas con la idea de financiar nuestro patrón de consumo futuro. Nadie cuestionará entonces la importancia de entender el efecto que la incertidumbre tiene sobre las decisiones de los individuos. La incertidumbre y el riesgo no son conceptos nuevos. Sin embargo, su incorporación en un cuerpo teórico formal de elección del consumidor sólo se remonta a la década de los 50.

El enfoque que utilizaremos para profundizar en esta materia corresponde al desarrollado por Von Neumann, Morgenstern y Savage conocido como La Teoría de la Utilidad Esperada. Nuestro interés es netamente instrumental y no pretendemos realizar un exposición completa y detallada de los elementos que subyacen a esta teoría. Nuestra idea es exponer los elementos que nos ayudarán a comprender los contenidos que trataremos más adelante.

1.1. Incertidumbre y Elección

Para comenzar, precisaremos algunos elementos. Primero, definiremos lo que entendemos por incertidumbre, y específicamente lo que entendemos por riesgo. Segundo, formalizaremos los criterios que el individuo racional utiliza para elegir entre distintas alternativas con resultado incierto.

1.1.1. El Riesgo y La Incertidumbre

La incertidumbre puede ser entendida como el estado de no conocer si una proposición determinada es verdadera o falsa. La incertidumbre nace por el hecho que hoy, cuando tomamos una decisión, no sabemos el verdadero estado de la naturaleza que se realizará a futuro. En finanzas representamos la incertidumbre a través de una función de densidad de probabilidad (f.d.p.) para la variable de interés. Por ejemplo, si la variable de interés es la riqueza del próximo período, $\widetilde{W}$; asumiremos que la variable $\widetilde{W}$ tiene una f.d.p. dada por $f(W)$, con todas las propiedades que debe satisfacer esta función. Así, aún cuando no sabemos hoy cual será la riqueza que tendremos al final del próximo período, si podemos determinar la probabilidad que la riqueza esté en cierto rango, $P(a < W < b) = \int_a^b f(W)dW$; o el valor esperado de la riqueza $E(W) = \int_{-\infty}^{\infty} Wf(W)dW$, entre otras cosas.

Este enfoque para modelar la incertidumbre tiene algunas limitaciones. Por ejemplo, si usted debe sacar una ficha de una urna, ¿cuál es la probabilidad que ésta sea roja?. Seguramente con la información que tiene su estimación será bastante pobre. Si ahora le digo que en la urma hay 10 fichas rojas y 10 fichas azules, ¿cuál es la probabilidad que la ficha sea roja?, ¿se aventura usted a decir que la probabilidad es 0,5?... ¡olvidé decirle que en la urna tambien hay 10 fichas amarillas!. En este ejemplo se ve que la incertidumbre depende de cuánta información tengamos para determinar si la proposición en cuestión es verdadera o falsa. En el extremo podríamos pensar que la incertidumbre no existe, pues sólo reflejaría nuestro desconocimiento de cómo funciona el mundo que nos rodea.

Dejando de lado esta visión algo filosófica de la incertidumbre, asumiremos que una proposición determinada tiene una probabilidad intrínseca de ser falsa o verdadera. Bajo este esquema entenderemos que la incertidumbre medible corresponde a esta probabilidad objetiva (ignorancia necesaria), y la incertidumbre no medible corresponde a opiniones que podrían estar contaminadas con desconocimiento (probablemente innecesario) de un fenómeno de interés. Si usted no cree que esta probabilidad objetiva existe, al menos debe estar deacuerdo en que un individuo puede cuantificar la *incertidumbre percibida*. Ambas alternativas son igualmente útiles para nuestros propósitos.

Puede haber muchos fenómenos que involucran incertidumbre, pero no todos serán relevantes para un individuo en sus decisiones. Por ejemplo, el hecho que un habitante desconocido para usted en China sufra un sinistro es un fenómeno incierto. Sin embargo, probablemente este fenómeno le importará muy poco a usted aqui en Chile. Esto nos permite definir lo que entendemos por *exposición*. Diremos que una persona está expuesta a una proposición si a esta persona le importa si dicha proposición (aún cuando no la conozca) sea verdadera o falsa. Bajo esta premisa diremos entonces que *riesgo es la exposición a un fenómeno del cual uno tiene* *incertidumbre*. En otras palabras, riesgo es aquella incertidumbre que afecta al individuo. Note que riesgo es una dimensión más limitada que incertidumbre, ya que el riesgo requiere ambos elementos: a) incertidumbre y b) exposición.

1.1.2. La Utilidad Esperada

Para completar nuestro marco conceptual nos queda aún por definir como determinaremos lo que al individuo le importa (exposición), y más específicamente como el individuo elegirá entre alternativas riesgosas[1]. Por ejemplo, suponga que un individuo puede comprar hoy una acción de la empresa Alfa por \$100. El riesgo de la inversión viene dado por el hecho que hoy el individuo no sabe el precio que tendrá la dicha acción en un año más, cuando él piensa venderla. Si la empresa concreta con éxito su plan de crecimiento, el precio en un año más será \$140. Si la empresa fracasa en la concresión de su plan de crecimiento, el precio de la acción será sólo \$90. Asuma para este ejemplo que ambos estados de la naturaleza (éxito o fracaso) son igualmente probables[2].

Alternativamente, el individuo puede invertir en un *activo libre de riesgo* con rentabilidad anual de 8 %. Note que este activo tendrá una rentabilidad de 8 % con probabilidad igual a 1 (sabemos hoy con certeza el retorno que obtendremos en un año), de ahi su denominación como libre de riesgo. Vemos entonces que el individuo enfrenta dos opciones de inversión: la acción (activo riesgoso) y el activo libre de riesgo. Si la elección es la acción, el individuo puede tener una rentabilidad de 40 % o una rentabilidad de -10 % con igual probabilidad (0,5). Podemos decir entonces que la rentabilidad esperada de comprar la acción es:

$$E(R) = P(exito) * 0,4 + P(fracaso) * -0,1 = 0,5 * 0,4 + 0,5 * -0,1 = 15\,\%$$

Pues bien, ¿qué alternativa será elegida por el individuo?, ¿puede usted como observador externo predecir la elección del individuo?. Algunos elementos le pueden ayudar. Primero, la acción tiene una *rentabilidad esperada* de 15 %, pero tiene riesgo; debe darse cuenta que en el peor de los casos el individuo perderá parte de su riqueza. En el segundo caso, la rentabilidad

[1] En lo que sigue hablaremos de riesgo e incertidumbre como sinónimos, aún cuando ya sabemos que hay algunas diferencias.

[2] En este ejemplo y en lo que sigue asumiremos que los estados probables de la naturaleza son excluyentes y exhaustivos. Es decir, para el ejemplo en cuestión no puede ser que en un año más el precio de la acción sea distinto de \$140 o \$90; claramente el precio no puede ser \$140 y \$90 a la vez.

es 8 %, pero sin riesgo. La pregunta fundamental aqui entonces es ¿estará el individuo dispuesto a asumir el riesgo de la acción por un retorno esperado adicional (o prima por riesgo) de 7 %?, alternativamente, ¿es suficiente un 7 % para compensar el riesgo que asume el individuo?. Para contestar estas preguntas, seguiremos la tradición en economía y supondremos que los individuos son agentes racionales que intentan maximizar su bienestar. En pocas palabras, diremos que cada individuo tiene un sistema de preferencias que determinan sus elecciones[3]. Para operacionalizar el concepto de preferencias debemos imponer ciertas condiciones a la conducta de los individuos (axiomas de preferencia) que garanticen la consistencia y racionalidad necesarias para representar las preferencias a través de una función de utilidad cardinal del tipo $U(W)$, siendo W la riqueza del individuo[4].

Los cinco axiomas de preferencias no serán discutidos en este documento docente[5]. Para nuestro propósito aquí, basta decir que bajo estos cinco axiomas de preferencias es posible demostrar que los individuos se comportarán *como si* asignarán un nivel de bienestar (o utilidad) a cada alternativa riesgosa, para luego jerarquizar estas alternativas en base a la *utilidad esperada*[6].

Para ser más precisos, defina una situación riesgosa (juego) como $G(x, y : \alpha)$; ganamos x con probabilidad α y ganamos y con probabilidad $1 - \alpha$. Los axiomas de preferencia implican dos cosas fundamentales:

1. Existe una función de utilidad $U(\bullet)$ que preserva el orden de las preferencias. Es decir, si el individuo prefiere x a y, entonces $U(x) > U(y)$,

2. La utilidad esperada $E(U(\bullet))$ permite jerarquizar las alternativas riesgosas. Es decir, para la situación anterior, el bienestar derivado del juego puede ser medido por: $U(G(x, y : \alpha)) = \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y)$.

[3]Debe tener presente que en finanzas, al igual que en economía, no nos interesa saber por qué el individuo elige lo que elige; no nos interesan las raices psicológicas o sociológicas de sus preferencias, sólo nos interesa saber que dichas preferencias existen.

[4]La riqueza se entiende como el valor económico hoy de todos los activos que el individuo posee. Es decir, la riqueza corresponde al valor presente de todos los flujos de caja que el individuo espera recibir de sus activos.

[5]Los alumnos interesados en una discusión de los axiomas de preferencia pueden consultar el capítulo 3 de Copeland, T., Weston, F., y Shastri, K. 2005. Financial Theory and Corporate Policy.

[6]Una corriente de investigación relativamente nueva llamada Finanzas Conductuales (Behavioral Finance) ha encontrado, basada en experimentos con individuos, una serie de violaciones de algunos axiomas de preferencia. Este tema es muy interesante, pero por ahora está fuera del alcance de este documento docente.

Dado el conjunto de supuestos que hemos hecho hasta ahora, sólo basta conocer la distribución de probabilidad del *payoff* relevante y la función de utilidad del individuo para saber qué alternativas serán preferidas por él. Note que en ninguna parte hemos dicho que el individuo realizará todos estos cálculos a la hora de decidir sobre alternativas riesgosas; lo único que hemos establecido es que bajo los axiomas de preferencia, el individuo se comportará *como si* realizara estos cálculos. En otras palabras, lo que estamos diciendo es que la conducta de elección bajo incertidumbre de un individuo racional no será distinguible de la elección basada en la utilidad esperada.

En general suponemos que los individuos prefieren más riqueza que menos y, por lo tanto, $U'(W) = \frac{\delta U(W)}{\delta W} > 0$ (supuesto de insaciabilidad local). Agregando este supuesto podemos entonces predecir que los individuos, a través de sus decisiones, buscarán maximizar su utilidad esperada. Ahora sí podemos volver al ejemplo inicial de la compra de la acción de la empresa Alfa versus la inversión en un activo libre de riesgo. Asuma que la función de utilidad del individuo está dada por $U(W) = Ln\, W$.

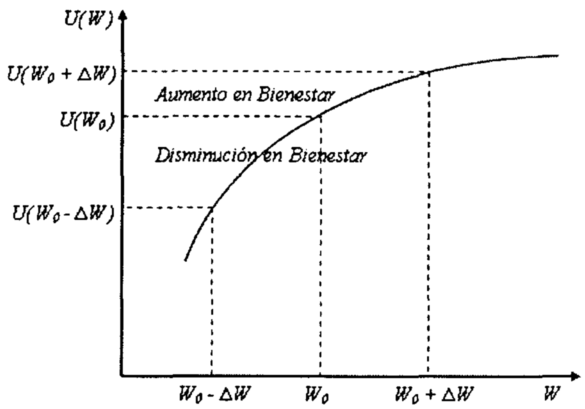
$$
\begin{aligned}
& Accion\ de\ Empresa\ Alfa \\
U(G(140, 90 : 1/2)) &= E(U(W)) \\
&= 0,5 * U(140) + 0,5 * U(90) \\
&= 0,5 * Ln140 + 0,5Ln90 \\
&= 4,72 \\
& Activo\ Libre\ de\ Riesgo \\
U(180) &= Ln108 \\
&= 4,68
\end{aligned}
$$

Vemos así que el individuo con preferencias representadas por una función de utilidad logarítmica preferirá comprar la acción de la empresa Alfa. Alternativamente, podemos decir que para este individuo el retorno esperado adicional de 7 % es suficiente compensación por el riesgo adicional asociado a la compra de la acción de Alfa. ¿Qué pasa si la rentabilidad del activo libre de riesgo es 13 %?; de su respuesta, ¿qué puede concluir intuitivamente?

1.2. Actitud Frente al Riesgo

Hasta este momento hemos visto que, asumiendo que los axiomas de preferencia e insaciabilidad son verdaderos, los individuos tomarán decisiones como si maximizaran su utilidad esperada. Sin embargo, este planteamiento es muy general. La intuición nos dice que todos los individuos son potencialmente distintos a la hora de asumir riesgos. Por ejemplo, vemos que algunas personas toman seguros contra sinistros mientras otras no lo hacen. En esta sección pretendemos caracterizar a los individuos en función de como perciben el riesgo; este es el ingrediente esencial para determinar como los individuos eligen en qué activos invertir hoy la riqueza que financiará el consumo futuro.

Figura 1.1: Función de Utilidad de un Averso al Riesgo



Imagine una persona que tiene hoy una riqueza W_0. Al final del próximo año, esta persona puede haber perdido ΔW o haber ganado ΔW. Dado que suponemos que siempre se prefiere más riqueza, sabemos que:

$$U(W_0 + \Delta W) > U(W_0) > U(W_0 - \Delta W)$$

Diremos que un individuo es *averso al riesgo* si su pérdida de bienestar es mayor que la ganancia en bienestar derivada de una disminución o aumento, respectivamente, de igual magnitud en su riqueza. Formalmente,

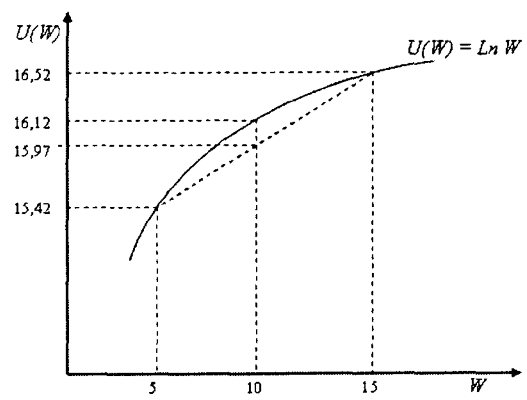
$$U(W_0 + \Delta W) - U(W_0) < U(W_0) - U(W_0 - \Delta W)$$

Lo que estamos diciendo es que para un averso al riesgo la utilidad marginal de la riqueza es decreciente, $U''(W) = \frac{\delta^2 U(W)}{\delta W^2} < 0$; a medida que la riqueza aumenta, el incremento en la utilidad es progresivamente más pequeño. Esta situación es caracterizada en la figura 1.1.

Debemos darnos cuenta que un individuo averso al riesgo siempre preferirá una alternativa sin riesgo a una alternativa riesgosa de igual valor esperado (juego justo). Suponga que usted tiene una riqueza de \$10 millones. Usted puede jugar un juego (inversión), donde puede perder \$5 millones o ganar \$5 millones con igual probabilidad. Es decir, usted tendrá, después del juego, \$5 millones o \$15 millones, dependiendo del estado de la naturaleza que se realice. Note que el valor esperado de la riqueza si usted juega es $E(W) = 5 * 0,5 + 15 * 0,5 = 10$ millones, lo mismo que usted tiene hoy con certeza; ¿tomaría este juego? Si su respuesta es NO, entonces usted se ha comportado como un agente averso al riesgo. Si su respuesta a la propuesta es SI, entonces usted se ha comportado como un *amante al riesgo*. Finalmente, si usted está indiferente entre tomar el juego o no, entonces usted se ha comportado como un agente *neutral al riesgo*.

Antes usamos la función de utilidad $U(W) = Ln\ W$ sin saber a que tipo de individuo representaba. Veamos, a) $U'(W) = \frac{1}{W} > 0$ por lo tanto esta persona prefiere más riqueza que menos, b) $U''(W) = -\frac{1}{W^2} < 0$, por lo tanto esta persona es aversa al riesgo. Comprobemos que efectivamente esta persona está mejor no tomando el juego justo propuesto anteriormente. Si no toma el juego, su utilidad será $U(10\ millones) = Ln 10{,}000{,}000 = 16,12$. Si toma el juego, su utilidad esperada será $E(U(w)) = 0,5 * Ln 5{,}000{,}000 + 0,5 * Ln 15{,}000{,}000 = 15,97$.

Figura 1.2: Ejemplo de Elección



Siguiendo un argumento similar, es posible establecer las características de un individuo amante al riesgo y otro neutral al riesgo. Podemos entonces caracterizar a cada individuo a partir del tipo de función de utilidad que tiene:

1. Averso al riesgo $U''(W) < 0 \Leftrightarrow E(U(W)) < U(E(W))$,

2. Amante al riesgo $U''(W) > 0 \Leftrightarrow E(U(W)) > U(E(W))$,

3. Neutral al riesgo $U''(W) = 0 \Leftrightarrow E(U(W)) = U(E(W))$.

Usted puede ver que, a diferencia de lo que pasa con un averso al riesgo, la función de utilidad del amante al riesgo es convexa con la riqueza, y la función del neutral al riesgo es lineal con la riqueza. De esta definición vemos, por ejemplo, que si un individuo amante al riesgo debe elegir entre un juego con valor esperado de $10 y $10 con certeza él preferirá tomar el juego. Acabamos de ver que lo opuesto es cierto para un averso al riesgo. A modo de ejercicio, para el mismo juego descrito arriba (ganar o perder $5 millones con probabilidad 0,5), determine la decisión que adoptarán los individuos: a) $U(W) = W^{0,5}$, b) $U(W) = W^2$, c) $U(W) = 3W$, d) $U(W) = (1 - W^{0,5})$. Verifique que las definiciones 1, 2 y 3 arriba se cumplen, graficando cada situación.

Si la discusión hasta ahora le parece muy teórica, le invito a ver su relevancia en la práctica. La figura 1.3 muestra el cuestionario que provee la Asociación de AFP para que cada afiliando determine su actitud frente al riesgo. Esto es vital a la hora de decidir cuál de los cinco multifondos ofrecidos por las AFPs le acomoda más a su perfil de riesgo individual[7].

En finanzas estamos interesados en la conducta de inversión financiera del individuo (asignación de recursos a través del tiempo). Dado que la idea de esta inversión es financiar el patrón de consumo futuro, es muy poco probable que los individuos se comporten como amantes al riesgo, o incluso como neutrales al riesgo. Usted estará deacuerdo que, eliminando agentes mentalmente insanos, los individuos se comportarán en promedio como aversos al riesgo en este tipo de decisiones. Por esta razón, si no se dice otra cosa, de aquí en adelante se asumirá que los individuos son aversos al riesgo, al menos en el tipo de decisiones que nos interesan.

[7]Para quienes deseen (todos deberían) averiguar más sobre los multifondos y el sistema de AFP, le invito a visitar: http://www.afp-ag.cl

Figura 1.3: Cuestionario de Actitud Frente al Riesgo

Cuestionario Para Evaluar Actitud Frente al Riesgo

Responda las siguientes preguntas seleccionando sólo una de las tres alternativa presentadas:

1. ¿Cuál de las siguientes frases interpreta mejor sus sentimientos?:
   a. En la vida prefiero la seguridad y estoy dispuesto a mantener mi situación actual, aunque no esté muy bien.
   b. En la vida los riesgos se deben meditar, ya que no me gusta perder, pero si las condiciones son relativamente seguras, enfrento el desafío.
   c. En la vida prefiero arriesgarme y tener la opción de mejorar mi actual situación, porque pienso que puedo mejorar.
2. Si recibe un millón de pesos que sólo puede ocupar en tres años más, ¿Cómo invertiría el dinero?
   a. Lo invertiría en una cuenta de ahorro del Banco del Estado, por su mayor seguridad, con una rentabilidad de UF + 3% anual.
   b. Lo invertiría en un Fondo Mutuo balanceado, con una rentabilidad esperada máxima de UF + 10% anual y una rentabilidad mínima negativa posible de UF menos 2% anual.
   c. Lo invertiría en acciones de una empresa nueva con una rentabilidad esperada máxima de UF + 30% anual y una rentabilidad mínima negativa posible de UF menos 20% anual.
3. Señale cuál de las siguientes frases interpreta mejor su pensamiento respecto a una inversión de un millón de pesos en un Depósito a Plazo Bancario (Instrumento de Renta Fija):
   a. Es una excelente inversión, ya que es segura, aunque no me dé el mejor interés.
   b. Preferiría evaluar otra alternativa, como un Fondo con algunas acciones y algo más de renta fija, que sin correr grandes riesgos, me dé más ganancias.
   c. Preferiría invertir en un Fondo Accionario o en una acción en particular, ya que en un período largo tendré la opción de ganar mucho más.
4. Señale cuál de las siguientes frases interpreta mejor su pensamiento respecto a una inversión de un millón de pesos en acciones (Instrumento de Renta Variable):
   a. No me gustaría invertir, ya que varía mucho y puedo perder plata
   b. Invertiría sólo a través de un Fondo con distintas acciones e inversiones en renta fija, para ganar más pero con baja probabilidad de pérdida.
   c. Prefiero invertir en acciones ya que en un período largo, podría ganar más.
5. ¿Ha invertido o estaría dispuesto a invertir sus ahorros personales en acciones o Fondos Mutuos accionarios?.
   a. Jamás he invertido y no lo haría
   b. Estaría dispuesto a evaluar la opción
   c. Sí he invertido e invertiría mis ahorros en el futuro

Calificación:

a. = 1 punto
b. = 2 puntos
c. = 3 puntos

Aversión al Riesgo	**= Entre 5 y 7 puntos.**
Indiferencia al Riesgo	**= Entre 8 y 12 puntos**
Preferencia por Riesgo	**= Entre 13 y 15 puntos**

1.3. Valoración del Riesgo

Como vimos en el apartado anterior, un individuo averso al riesgo siempre preferirá una alternativa sin riesgo a una alternativa riesgosa de igual valor. Esto emerge de la definición que establece que para un agente averso $E(U(W)) < U(E(W))$. Podemos pensar que el individuo averso al riesgo *penaliza* el valor esperado de una situación riesgosa en un monto que depende del riesgo asociado. Esta penalizacion es el valor monetario que el individuo asigna al riesgo.

1.3.1. Equivalente Cierto y Prima por Riesgo

Definiremos el *equivalente cierto de la riqueza*, W_{EC}, de un juego como aquel nivel de riqueza que deja al individuo indiferente entre tomar o no tomar este juego riesgoso. Formalmente, W_{EC} debe satisfacer la condición:

$$U(W_{EC}) = E(U(W))$$

Entonces, podemos establecer que el equivalente cierto de la riqueza está dado por:

$$W_{EC} = U^{-1}[E(U(W))]$$

donde $U^{-1}[\bullet]$ representa la función inversa de $U(\bullet)$[8].

Volvamos al ejemplo anterior en que un individuo con función de utilidad $U(W) = Ln\ W$ debía elegir entre una acción de la empresa Alfa y un activo libre de riesgo. La compra de la acción requería desembolsar \$100 hoy, y la utilidad esperada era 4,72. Con esta infomación podemos decir que el equivalente cierto de la riqueza es:

$$W_{EC} = U^{-1}[E(U(W))] = e^{4,72} = \$112,25$$

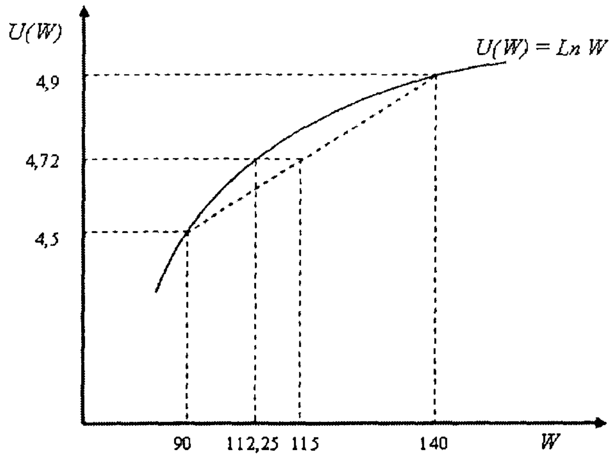
Vemos entonces que, dada la definición de equivalente cierto de la riqueza, este individuo estará indiferente entre comprar la acción de Alfa o recibir \$112,25 con certeza. Alternativamente, podemos decir que la única manera que el individuo prefiera el activo libre de riesgo es que éste tenga una rentabilidad de al menos 12,25 %.

En el ejemplo anterior teníamos que el valor esperado de la acción era \$115. Sin embargo, el individuo valora esta acción, luego de eliminar el riesgo, sólo en \$112,25. La intuición nos dice que la diferencia (\$2,75) es la penalización que este individuo aplica al valor esperado de un activo riesgoso. Note que el riesgo viene dado por la posibilidad que la riqueza realizada sea distinta de la riqueza esperada al momento de invertir. Esta penalización corresponde a lo que llamaremos *prima por riesgo* (π), la que se define como:

$$\pi = E(W) - W_{EC}$$

[8] Note que es posible definir esta función inversa ya que hemos asumido que la función de utilidad es estrictamente monótona (creciente) en el rango de riqueza relevante.

Figura 1.4: Equivalente Cierto y Prima por Riesgo



Esta prima representa la máxima disposición a pagar (en unidades monetarias) por eliminar el riesgo de una situación riesgosa. Alternativamente, esta prima corresponde a lo mínimo que un individuo exigirá por asumir riesgo en una situación riesgosa. La figura 1.4 ilustra la geometría de esta situación.

Ya determinamos que para un averso al riesgo se cumple que $E(U(W)) = U(W_{EC}) < U(E(W))$. Con la definición de prima por riesgo, tenemos que $U(E(W) - \pi) < U(E(W))$, de donde podemos deducir que $\pi > 0$ para un averso al riesgo[9]. Es decir, un individuo averso al riesgo siempre estará dispuesto a pagar un monto estrictamente positivo para evitar el riesgo asociado a una situación riesgosa.

1.3.2. Determinantes de la Prima por Riesgo

Nuestra exposición teórica de la elección bajo incertidumbre nos ha llevado bastante lejos. La discusión ha llegado a su punto más relevante y final que puede ser resumido en una simple pregunta: ¿de qué factores depende la prima que un individuo exige como compensación por

[9]Usted debe darse cuenta que esta deducción sigue del supuesto que más es preferido a menos ($U'(W) > 0$). Un argumento similar muestra que $\pi < 0$ para amantes al riesgo y que $\pi = 0$ para neutrales al riesgo.

asumir riesgos? En lo que queda de esta sección trataremos de contestar esta pregunta. Estos desarrollos nos darán el punto de partida para el siguiente capítulo.

Si partimos de la condición de indiferencia definida antes, tenemos que:

$$E(U(W)) = U(E(W) - \pi)$$

Nos interesa saber, por ahora a nivel individual, de qué depende la variable π. Partiendo de esta ecuación de indiferencia del individuo y aproximando cada lado a través de una expansión de Taylor[10], podemos encontrar la respuesta a esta pregunta:

1. Expandimos $U(W)$ alrededor del valor esperado del juego $E(W) = \mu$, resultando:

   $$U(W) \approx U(\mu) + U'(\mu)(W - \mu) + U''(\mu)\frac{(W-\mu)^2}{2}$$

   Luego aplicamos esperanza al resultado y obtenemos:

   $$E(U(W)) \approx U(\mu) + U'(\mu)E(W - \mu) + U''(\mu)\frac{E(W-\mu)^2}{2}$$

   Usted puede darse cuenta que $E(W - \mu) = 0$, por definición, y que $E(W - \mu)^2 = Var(W)$ corresponde a la varianza de la riqueza. Reemplazando, tenemos que: $E(U(W)) \approx U(\mu) + U''(\mu)\frac{Var(W)}{2}$

2. Expandimos ahora $U(E(W) - \pi)$ alrededor de la riqueza esperada $E(W) = \mu$, resultando:

   $$U(\mu - \pi) \approx U(\mu) + U'(\mu)(\mu - \pi - \mu)$$

   Vemos que: $U(\mu - \pi) \approx U(\mu) - \pi U'(\mu)$.

Igualando los resultados de 1. y 2. y despejando, tenemos:

$$\pi_{AP} = -\frac{1}{2}\frac{U''(\mu)}{U'(\mu)}Var(W)$$

Debemos tener presente que esta expresión, que denominaremos prima por riesgo de Arrow-Pratt, es sólo una aproximación de la prima por riesgo definida con anterioridad $\pi_M = E(W) - W_{EC}$, a la que denominaremos la prima por riesgo de Markowitz. En el ejemplo de la compra

[10] De sus cursos de cálculo usted debe recordar que una función continua y diferenciable $f(x)$ puede ser aproximada alrededor del punto c en su dominio por: $f(x) \approx f(c)+f'(c)(x-c)+f''(c)\frac{(x-c)^2}{2!}+f'''(c)\frac{(x-c)^3}{3!}+\cdots+f^n(c)\frac{(x-c)^n}{n!}$

de la acción de la empresa Alfa habíamos determinado que la prima por riesgo era $\pi_M = \$2,75$ mediante el método de Markowitz. Comprobemos que la expresión que acabamos de desarrollar nos da un valor aproximado de esta prima. Como la función de utilidad era $U(W) = Ln\, W$, tenemos que $-\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{1}{W}$. La varianza de la riqueza es: $Var(W) = \sum p_i(W_i - \mu)^2 = 0,5(90 - 115)^2 + 0,5(140 - 115)^2 = 625$. Tenemos entonces que la prima aproximada es $\pi_{AP} = \frac{1}{2 \times 115} \times 625 = \$2,72$

Aún cuando la prima de Arrow-Pratt es sólo una aproximación de la prima verdadera, esta definición nos permite ver en forma analítica los determinantes de dicha prima. De esta expresión, vemos que la prima (en unidades monetarias) que un individuo exigirá por asumir riesgo aumentará (disminuirá) si aumenta (disminuye) la varianza de la riqueza de fin de período, $Var(W)$. Tenemos así que la varianza puede ser (y será) interpretada como una medida de riesgo asociada a nuestra riqueza futura. Es importante notar que la varianza captura la dispersión de la riqueza alrededor de su valor esperado y, por tanto, el grado de incertidumbre que tenemos sobre nuestra riqueza futura. Así, a mayor dispersión mayor será el riesgo percibido por el individuo. Por ejemplo, un juego donde se puede ganar o perder \$100 con igual probabilidad será menos riesgoso que un juego donde de pueda ganar o perder \$1.000, aún cuando ambos juegos tengan un valor esperado igual a cero.

Como vimos antes, para aversos al riesgo se cumple que $U''(W) < 0$, y para neutrales al riesgo $U''(W) = 0$. Entonces, la curvatura de la función de utilidad (segunda derivada) es la que determina el grado de aversión al riesgo del individuo. Tenemos entonces que el otro determinante de la prima por riesgo exigida es el *Coeficiente de Aversión Absoluta al Riesgo (ARA)* del individuo dado por:

$$Absolute\ Risk\ Aversion \rightarrow ARA(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Note que este coeficiente es siempre positivo para individuos aversos al riesgo ya que para estos $U''(W) < 0$. Tenemos entonces que mientras mayor sea el ARA, mayor será la aversión al riesgo del individuo y, por lo tanto, mayor será la prima exigida para asumir un riesgo determinado. Podemos darnos cuenta, a partir de esto, que la prima por riesgo irá cambiando a medida que la riqueza del individuo cambia. Esto puede verse al observar $\frac{\delta\pi}{\delta W} = \frac{\delta\pi}{\delta ARA}\frac{\delta ARA}{\delta W}$. El primer factor es siempre positivo, ya que la varianza es siempre positiva. Sin embargo, el segundo factor puede ser negativo, positivo o cero. En pocas palabras, el mismo individuo siendo millonario o siendo pobre puede tener un grado de aversión distinto frente al riesgo. Vemos entonces que, ante un aumento en la riqueza, la prima que un individuo demanda para un mismo juego puede aumentar, disminuir o mantenerse, dependiendo de si la aversión absoluta al riesgo es creciente, decreciente o constante en la riqueza respectivamente. Por ejemplo, si tenemos un individuo con aversión absoluta decreciente en la riqueza, al aumentar su riqueza la prima por riesgo de este individuo disminuirá. De esto podemos concluir que su demanda por activos riesgosos aumentará a medida que su riqueza aumenta. Por esta razón, al momento de determinar la prima por riesgo de un individuo, debemos considerar no sólo la riqueza involucrada en un juego (inversión) específico sino que toda la riqueza que el individuo posee al momento de enfrentar la situación riesgosa. Intuitivamente, ¿qué tipo de ARA (creciente, decreciente o constante en la riqueza) sería razonable esperar para una persona promedio?, ¿por qué?

Una definición alternativa del grado de aversión al riesgo de los individuos es el *Coeficiente de Aversión Relativa al Riesgo (RRA)*. Este esta definido por:

$$Relative\ Risk\ Aversion \rightarrow RRA(W) = -W\frac{U''(W)}{U'(W)} = WARA(W)$$

Note que este coeficiente representa una estandarización del ARA, eliminando la dependencia que éste tiene del nivel de riqueza actual del individuo. Como su nombre lo indica, esta medida permite analizar la aversión al riesgo de un individuo en relación a ganancias o pérdidas porcentuales. Esta medida es claramente la relevante cuando la riqueza es expresada en términos porcentuales (retornos), enfoque que utilizaremos en el capítulo siguiente. Al igual que el ARA, en mayor RRA indica que el individuo es más averso al riesgo. Note además que este coeficiente puede ser creciente, decreciente o constante en la riqueza, $\frac{\delta RRA(W)}{\delta W} > 0, < 0, = 0$. Intuitivamente, podemos decir que un individuo con RRA decreciente en la riqueza invertirá una *proporción* cada vez mayor de su riqueza en activos riesgosos a medida que su riqueza aumenta. La interpretación de los dos casos restantes es equivalente. ¿Qué tipo de RRA tiene un individuo que siempre gasta la misma proporción de su riqueza en activos riesgosos, independiente del nivel de riqueza?, ¿su ARA será creciente o decreciente en la riqueza?

Antes de terminar, es necesario enfatizar que las lecciones de este capítulo son los pilares fundamentales de los contenidos posteriores. No olvide que una cuestión central en finanzas es la determinación de la compensación que debe ofrecer un activo riesgoso para que individuos aversos al riesgo lo usen como vehículo de inversión financiera. En este capítulo hemos dado los primeros pasos hacia el entendimiento de esta materia, pero aún nos falta generalizar nuestras conclusiones.

Capítulo 2: Teoría de Carteras

En este capítulo presentamos los elementos centrales de la teoría de portafolios o teoría de carteras. En la introducción de este documento docente establecimos que un individuo debe tomar dos decisiones interrelacionadas: a) la decisión de consumo-ahorro hoy, y b) como invertir los ahorros en los distintos activos disponibles. Esta última decisión es la que llamaremos la *decisión de selección de portafolio.* Un portafolio en el presente contexto corresponderá entonces a la colección de activos en los cuales un individuo invierte hoy sus ahorros con la idea de financiar su consumo futuro.

La teoría moderna de portafolios tiene su origen en el trabajo de Markowitz en el año 1952. Sólo después que von Neumann y Morgenstern en 1944 ofrecieran un tratamiento axiomático de la elección bajo incertidumbre, fue posible que Markowitz tratara formalmente (formulación y solución) el problema de selección de portafolios mediante lo que llamamos el análisis Media-Varianza. Los fundamentos y principios derivados del análisis Media-Varianza son el principal objetivo de este capítulo.

El modelo Media-Varianza descansa sobre el supuesto que los individuos son capaces de generar un ranking de las distintas alternativas riesgosas sólo en base a la media y la varianza de la distribución de probabilidad de la riqueza futura. Este análisis es consistente con los postulados de la teoría de la utilidad esperada, aún cuando es algo más restrictivo pues requiere imponer restricciones ya sea en la distribución de probabilidad de la riqueza o en las preferencias del individuo. En general, si la incertidumbre sobre la riqueza puede ser representada por una distibución normal o las preferencias del individuo son cuadráticas, el análisis de media-varianza que veremos a continuación será perfectamene consistente con la maximización de la utilidad esperada. Alternativamente, si ninguna de estas condiciones se cumple podemos argumentar que otras características de la distribución de probabilidad de la riqueza, como el sesgo o la curtosis, no alteran significativamente las decisiones de portafolio de los individuos y, por lo tanto, son despreciables en el análisis.

2.1. Media y Varianza como Criterio de Selección Individual

La teoría de la utilidad esperada presentada en el capítulo anterior es en principio una teoría completa de elección bajo incertidumbre. Sin embargo, decir que los individuos racionales se comportarán como si estuvieran maximizando su utilidad esperada es una afirmación que, a pesar de tener un importante valor teórico, no provee proposiciones concretas u observables sobre el comportamiento de los individuos. Así, es necesario imponer más estructura al problema de selección de portafolios para obtener proposiciones observables.

Para conectar la teoría de la utilidad esperada y el modelo de Media-Varianza, usaremos algunos resultados del capítulo anterior. Definamos la riqueza futura (fin del período 1) a través de la variable aleatoria $\widetilde{W}_1$, con esperanza y varianza dada por $E(W_1)$ y $Var(W_1)$ respectivamente. En al capítulo anterior vimos que:

$$E(U(W)) = U(W_{EC}) = U(E(W_1) - \pi)$$

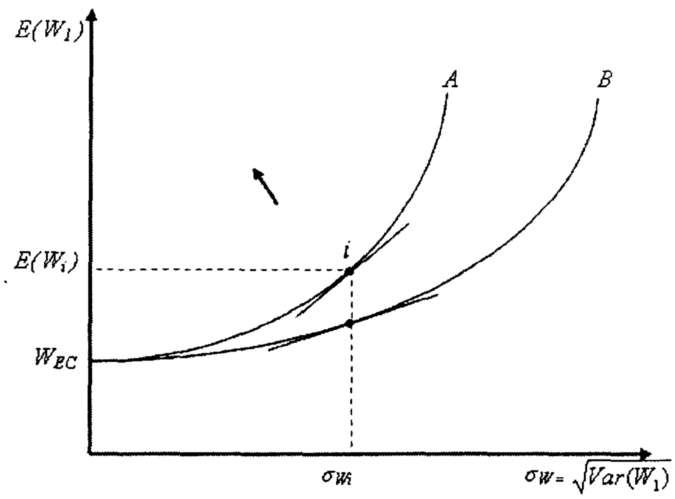
Mediante una aproximación de la función de utilidad, encontramos que la prima por riesgo (en unidades monetarias) está dada por $\pi = \frac{ARA}{2} Var(W_1)$. Reemplazando esta expresión en la ecuación de indiferencia arriba, tenemos que:

$$E(U(W)) = U(E(W_1) - \tfrac{ARA}{2} Var(W_1))$$

Como la función de utilidad es monótona (creciente) en su argumento, tenemos que maximizar la utilidad esperada es equivalente a maximizar $E(W_1) - \frac{ARA}{2} Var(W_1)$. En este contexto, el riesgo es caracterizado exclusivamente por la varianza (alternativamente por la desviación estándar o volatilidad de la riqueza), mientras que el rendimiento de una inversión es caracterizado por el valor esperado de la riqueza.

Usted puede darse cuenta que pueden haber infinitos pares ordenados $[E(W_1), Var(W_1)]$ que reportarán el mismo nivel de bienestar al individuo. Esto equivale a definir una curva de indiferencia para el individuo en el plano media-varianza o alternativamente en el plano media-volatilidad. Claramente estas curvas de indiferencia deben tener pendiente positiva para un individuo averso al riesgo, ya que éste siempre exigirá una mayor riqueza esperada para asumir un mayor riesgo. La figura 2.1 muestra dos curvas de indiferencia para dos individuos distintos, usando como medida de riesgo la volatilidad de la riqueza $\sigma_W = \sqrt{Var(W_1)}$.

Figura 2.1: Curvas de Indiferencia en el Plano Media-Volatilidad



Tres elementos son importantes en esta figura. Primero, el bienestar de los individuo crece en el sentido de la flecha. Curvas de indiferencia ubicadas más hacia la esquina superior izquierda representan un mayor bienestar, ya que para cada nivel de riesgo la riqueza esperada al final del período es mayor. Segundo, la curva de indiferencia corta el eje y en el nivel de riqueza que habíamos llamado riqueza equivalente cierta. Entonces, el individuo A estará indiferente entre un portafolio que entregue una riqueza W_{EC} sin riesgo o el portafolio i que entrega una riqueza esperada $E(W_i)$ con un riesgo σ_{W_i}, ya que se cumple la igualdad $W_{EC} = E(W_i) - \frac{ARA_A}{2} Var(W_i)$. Finalmente, la pendiente de la curva de indiferencia del individuo A es mayor que la del individuo B para cualquier nivel de riesgo. Esto quiere decir que el individuo A es más averso al riesgo que el individuo B ya que la tasa (subjetiva) a la cual el individuo A está dispuesto a intercambiar rendimiento por riesgo es mayor que la correspondiente del individuo B, $\left[\frac{\Delta E(W)}{\Delta \sigma_W}\right]^A > \left[\frac{\Delta E(W)}{\Delta \sigma_W}\right]^B$. Esto es equivalente a decir que $ARA_A > ARA_B$.

En lo sucesivo no trabajaremos con la riqueza en términos absolutos sino que con los retornos de la riqueza total invertida. Este cambio de variable nos permitirá eliminar el problema de escala o tamaño de la inversión de cada individuo. Así, si la riqueza invertida hoy es W_0, entonces el retorno del portafolio personal será $\widetilde{R}_p = \frac{\widetilde{W}_1 - W_0}{W_0}$. Tenemos entonces que el retorno esperado y la varianza del retorno del portafolio personal serán[1]:

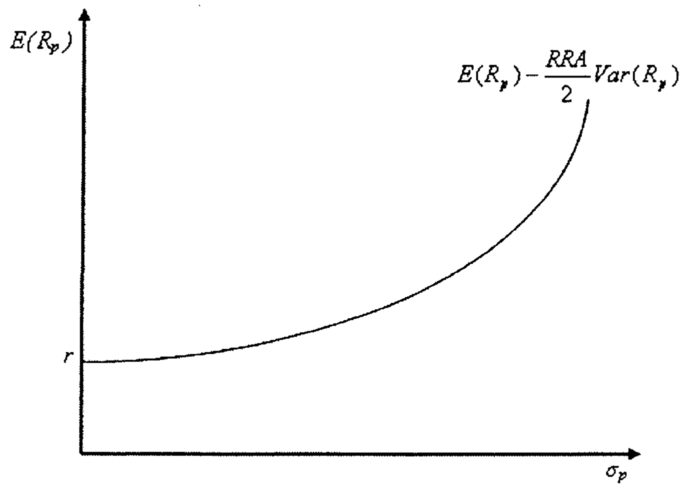
$$E(R_p) = \frac{E(W_1) - W_0}{W_0} \quad \text{y} \quad Var(R_p) = \frac{Var(W_1)}{W_0^2}$$

Sabemos que $W_{EC} = E(W_1) - \frac{ARA}{2} Var(W_1)$ corresponderá a la función que el agente intentará maximizar (bienestar). Si dividimos esta expresión por la riqueza invertida hoy W_0, tenemos que:

$$\frac{W_{EC}}{W_0} = 1 + r = 1 + E(R_p) - \frac{ARA}{2} \frac{Var(W_1)}{W_0} \quad .$$

donde r es la rentabilidad libre de riesgo equivalente del portafolio de riqueza. Reemplazando $Var(W_1) = W_0^2 Var(R_p)$, tenemos $r = E(R_p) - \frac{ARA}{2} \frac{W_0^2 Var(R_p)}{W_0}$. Como la aversión relativa al riesgo corresponde a $RRA = W \times ARA$, tenemos que $r = E(R_p) - \frac{RRA}{2} Var(R_p)$. La figura 2.2 muestra las curvas de indiferencia del individuo, pero ahora usando los retornos de la riqueza.

Figura 2.2: Curva de Indiferencia en el Plano Media-Volatilidad



Entonces, al hablar de retornos la función que el individuo intentará maximizar corresponde a:

$$U(R_p) = E(R_p) - \frac{RRA}{2} Var(R_p)$$

[1]Usted debe recordar que dada una variable aleatoria x, el valor esperado y la varianza de la función $y = a + bx$ con a y b constantes, serán $E(y) = a + bE(x)$ y $Var(y) = b^2 Var(x)$ respectivamente.

Hemos dado un gran paso al pasar de una afirmación que indica que los individuos buscarán maximizar la utilidad esperada (algo no observable) a una afirmación más concreta sobre los atributos específicos (observables) que preferirá un individuo. Con esto hemos sentado las bases de la teoría moderna de portafolios o modelo de Media-Varianza.

2.2. Media y Varianza de un Portafolio de Activos

Como establecimos antes, un portafolio corresponde a la colección de activos en que un individuo invierte su riqueza. Asuma que un individuo puede invertir su riqueza en n activos con retornos esperados $E(R_1), E(R_2), ..., E(R_n)$ y varianzas $Var(R_1), Var(R_2), ..., Var(R_n)$. Definimos la *estrategia de inversión* del individuo como el vector de porcentajes de inversión en cada activo $[w_1, w_2, ..., w_n]$, donde debe cumplirse que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. De esta manera, el portafolio personal estará dado por:

$$\widetilde{R}_p = w_1\widetilde{R}_1 + w_2\widetilde{R}_2 + ... + w_n\widetilde{R}_n$$

siendo n un número en los naturales. Nuestro interés estará centrado en el retorno esperado y la varianza del portafolio de activos más que en el retorno esperado y la varianza de los activos individuales que lo componen. Para extraer las principales lecciones sólo basta analizar portafolios de dos activos riesgosos, generalizando cuando sea pertinente a n activos.

2.2.1. Portafolio de dos Activos

Los Activos Individuales

Suponga que un individuo inverte su riqueza en dos activos solamente, activo 1 y activo 2, con retornos contingentes al estado de la economía en un año más:

Situación económica	Activo 1	Activo 2	Probabilidad (p)
Bonanza	30 %	8 %	0,2
Normal	12 %	10 %	0,5
Recesión	-6 %	4 %	0,3

El retorno esperado, $E(R_i) = \sum p * \widetilde{R}_i$, de los activos 1 y 2 corresponde a:

$$E(R_1) = 0,2 * 0,30 + 0,5 * 0,12 + 0,3 * -0,06 = 10,2$$
$$E(R_2) = 0,2 * 0,08 + 0,5 * 0,10 + 0,3 * 0,04 = 7,8$$

Por otro lado, la volatilidad[2] de los activos 1 y 2 corresponde a:

$$\sigma_1 = \sqrt{0,2 * (0,30 - 0,102)^2 + 0,5 * (0,12 - 0,102)^2 + 0,3 * (-0,06 - 0,102)^2} = 12,6\,\%$$
$$\sigma_2 = \sqrt{0,2 * (0,08 - 0,078)^2 + 0,5 * (0,10 - 0,078)^2 + 0,3 * (0,04 - 0,078)^2} = 2,6\,\%$$

Vemos que el activo 1 tiene un retorno esperado mayor que el activo 2, pero también tiene más riesgo. En principio es imposible saber con esta información qué activo será elegido por un individuo que deba elegir sólo uno de ellos. Suponga que un individuo con una función de bienestar del tipo presentado con anterioridad $U = E(R_i) - \frac{RRA}{2} Var(R_i)$ y con $RRA = 4$ debe elegir sólo uno de estos activos, ¿cuál elegirá?. Usted puede ver que el individuo preferirá el activo 2 ya que su índice de bienestar sería $U = 0,076$, mayor que el índice $U = 0,070$ que obtendría con el activo 1.

Sin embargo, los activos 1 y 2 no son inversiones mutuamente excluyentes. Es decir, el individuo puede formar un portafolio con ambos activos invirtiendo proporciones w y $1 - w$ en cada uno. Veamos las ventajas de formar un portafolio. El activo 1 parece un buen activo si la economía en un año más está en bonanza, pero este activo sufre bastante si la economía cae en recesión. Por otro lado, el activo 2, sin tener retornos impresionantes en ninguno de los tres estados, es menos volátil, particularmente en recesión. En pocas palabras, ambos activos tienen ventajas dependiendo del estado de la naturaleza que se realice en un año más. Estas ventajas relativas pueden ser aprovechadas al formar portafolios, plasmándose en lo que entendemos como *diversificación de carteras*. Una medida que nos permite determinar este grado de asociación lineal entre los retornos de un par de activos para los distintos estados de la naturaleza probables es *la covarianza* definida por:

$$Cov(R_1, R_2) = E\left[(\widetilde{R}_1 - E(R_1))(\widetilde{R}_2 - E(R_2))\right]$$

[2]En lo que sigue utilizaremos indistintamente la volatilidad o la varianza de los retornos como medida de riesgo. La volatilidad está definida como la desviación estándar ($\sigma_i = \sqrt{Var(R_i)}$) de los retornos.

Si calculamos la covarianza[3] de los activos 1 y 2 tenemos:

$$\begin{aligned} Cov(R_1, R_2) &= 0,2(0,3-0,102)(0,08-0,078) \\ &+ 0,5(0,12-0,102)(0,10-0,078) \\ &+ 0,3(-0,06-0,102)(0,04-0,078) \\ &= 0,002124 \end{aligned}$$

Desafortunadamente, la covarianza, al ser afectada por la magnitud de los valores, no nos permite saber si la relación entre los retornos es fuerte o débil. Por ahora sólo podemos decir que la asociación es positiva. Una medida que corrige esta limitación es el *coeficiente de correlación*, definido éste como:

$$Corr(R_1, R_2) = \frac{Cov(R_1, R_2)}{\sigma_1 \times \sigma_2}$$

Este coeficiente cumple con $-1 \leq Corr(R_1, R_2) \leq 1$, donde $Corr(R_1, R_2) = 1$ indica una asociación lineal perfecta y positiva entre las variables, $Corr(R_1, R_2) = -1$ indica una asociación lineal perfecta pero negativa entre las variables, y $Corr(R_1, R_2) = 0$ implica que no hay asociación lineal entre las variables.

Si calculamos el coeficiente de correlación para los activos 1 y 2, tenemos que $Corr(R_1, R_2) = \frac{0,002124}{0,126*0,026} = 0,65$. Es decir, tenemos dos activos que tienen una relación positiva, pero no perfecta. En cierto sentido, los retornos de estos activos se mueven juntos y en la misma dirección la mayoría del tiempo, pero no siempre.

El Portafolio y La Diversificación del Riesgo

El retorno del portafolio de dos activos es $\widetilde{R}_p = w\widetilde{R}_1 + (1-w)\widetilde{R}_2$. Usando las propiedades de la esperanza y la varianza[4],

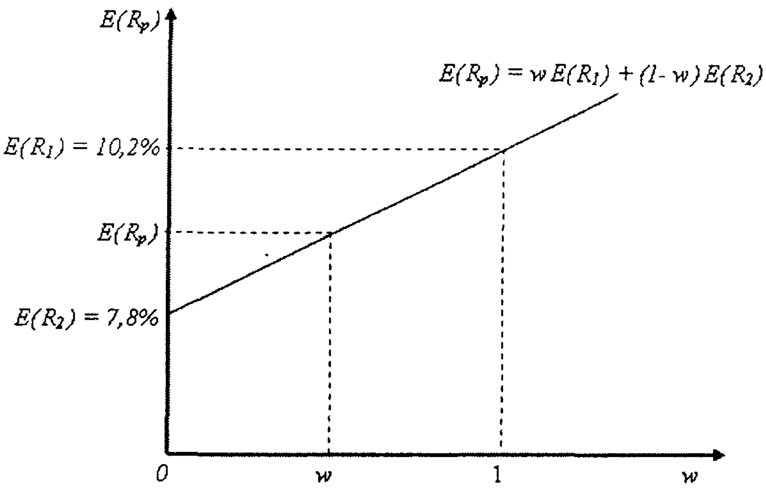
$$\begin{aligned} E(R_p) &= wE(R_1) + (1-w)E(R_2) \\ Var(R_p) &= w^2 Var(R_1) + (1-w)^2 Var(R_2) + 2w(1-w)Cov(R_1, R_2) \end{aligned}$$

Vemos así que el retorno esperado de un portfolio corresponde *siempre* al promedio ponderado de los retornos esperados de los activos individuales. La figura 2.3 muestra la relación entre el retorno esperado del portafolio de dos activos y la estrategia de inversión w.

[3]Note que $Cov(R_i, R_i) = Var(R_i)$, es decir la varianza del activo i.

[4]Dadas las variables aleatorias x e y, el valor esperado y la varianza de la variable $z = ax \pm by$, con a y b constantes, corresponde a $E(z) = aE(x) \pm bE(y)$ y $Var(z) = a^2 Var(x) + b^2 Var(y) \pm 2abCov(x, y)$.

Figura 2.3: Retorno Esperado para Distintas Estrategias de Inversión



Por el momento suponemos que $0 \leq w \leq 1$, aún cuando es posible tener $w > 1$ o $w < 0$ si se permite venta corta (short selling) de activos riesgosos. Un elemento que no se debe olvidar sobre la estrategia de inversión, es que ésta es la única decisión que toma el individuo al invertir. Es decir, el inversionista individual no puede afectar las características de la distribución de probabilidad de los retornos; lo único que sí puede decidir será el porcentaje a invertir en cada activo. Por ejemplo, suponga que el individuo invierte 50 % ($w = 0,5$) en cada uno de los dos activos de la tabla anterior. En este caso el retorno esperado del portafolio será:

$$E(R_p) = 0,5 * 0,102 + 0,5 * 0,078 = 9\,\%$$

Analicemos ahora la varianza del portafolio. Recordando que $Corr(R_1, R_2) = \frac{Cov(R_1,R_2)}{\sigma_1 \times \sigma_2}$, podemos calcular la varianza del portafolio como:

$$Var(R_p) = w^2 Var(R_1) + (1-w)^2 Var(R_2) + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2 Corr(R_1, R_2)$$

Con los datos anteriores sobre los activos 1 y 2 tenemos que la varianza del portafolio con estrategia $w = 0,5$ es:

$$Var(R_p) = 0,5^2 * 0,126^2 + 0,5^2 * 0,026^2 + 2 * 0,5 * 0,5 * 0,126 * 0,026 * 0,65 = 0,0052$$

y su volatilidad $\sigma_p = 7,21\,\%$. En nuestra discusión anterior, vimos que entre los activos 1 y 2, el individuo con $U = E(R_i) - 2Var(R_i)$ prefería el activo 2 ya que su índice de bienestar con este activo sería $U = 0,076$ versus $U = 0,070$ con el activo 1. Analicemos ahora qué será preferido por el individuo, el activo 2 o el portafolio con 50 % en cada activo. Sabemos que con $w = 0,5$, $E(R_p) = 9\,\%$ y $\sigma_p = 7,21\,\%$. Reemplazando en la función de bienestar $U = 0,09 - 2 * 0,0721^2 = 0,079$. Vemos así que entre el activo 2 y el portafolio, el individuo preferirá el portafolio.

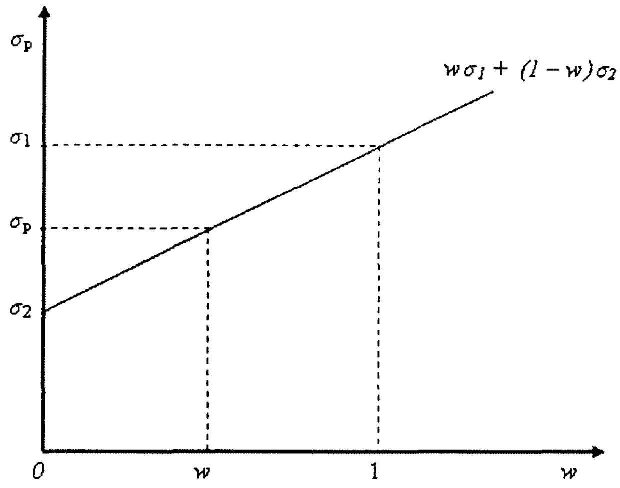
Una pregunta válida en este contexto sería ¿por qué al formar un portafolio, éste resulta más preferido que los activos que lo componen?. La respuesta tiene que ver con los elementos que componen la varianza de un portafolio y que determinan el potencial de diversificación que mencionamos antes. Luego de una simple manipulación algebraica podemos ver que:

$$Var(R_p) = (w\sigma_1 + (1-w)\sigma_2)^2 - 2w(1-w)(1 - Corr(R_1, R_2))\sigma_1\sigma_2$$

Lo interesante de presentar la varianza del portafolio de esta forma es que nos permite ver que, en general y a diferencia de lo que ocurre con el retorno esperado, la volatilidad de cartera (riesgo) no corresponderá al promedio ponderado de las volatilidades individuales. Tenemos que la volatilidad (desviación estándar) del portafolio corresponderá al promedio ponderado de las volatilidades individuales *sólo* cuando $Corr(R_1, R_2) = 1$. Al reemplazar $Corr(R_1, R_2) = 1$ en la última expresión, el último término desaparece, quedando $Var(R_p) = (w\sigma_1 + (1 - w)\sigma_2)^2$. Podemos ver que en este caso particular $\sigma_p = \sqrt{Var(R_p)} = w\sigma_1 + (1-w)\sigma_2$. Así, al invertir en dos activos que están correlacionados en forma perfecta y positiva, no tenemos ganancia alguna por diversificación ya que la volatilidad del portafolio será simplemente, al igual que el retorno esperado, un promedio ponderado de las volatilidades individuales. El figura 2.4 muestra la relación entre el riesgo del portafolio y la estrategia de inversión del individuo cuando $Corr(R_1, R_2) = 1$.

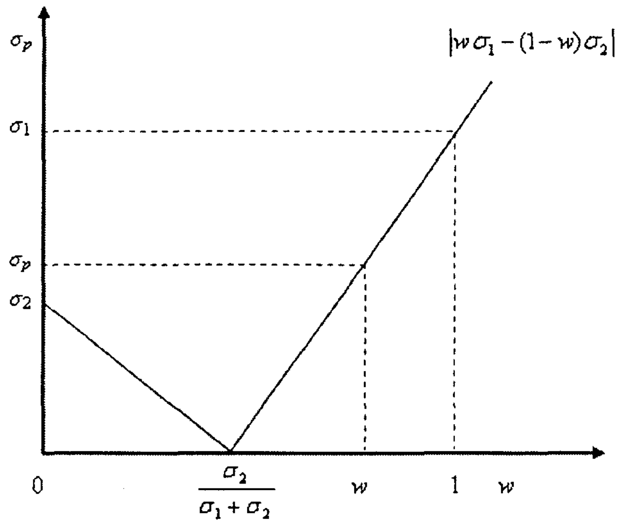
Por otro lado, siempre que $Corr(R_1, R_2) < 1$ el último término de la expresión será positivo, restándose algo mayor a cero al primer término de la varianza. Usted también verá que mientras más cerca está $Corr(R_1, R_2)$ de su cota inferior -1, más grande es el último término y, por lo tanto, mayor es la reducción en la varianza del portafolio. En el caso extremo donde $Corr(R_1, R_2) = -1$ usted puede ver que $\sigma_p = +\sqrt{Var(R_p)} = |w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2|$. Lo interesante de esto es que al incluir dos activos que están perfectamente correlacionados en forma negativa, es posible eliminar completamente el riesgo del portafolio escogiendo una estrategia de inversión que resulte en $w\sigma_1 = (1-w)\sigma_2$; verifique que inviertiendo $w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$ se logra que $\sigma_p = 0$

Figura 2.4: Riesgo del Portafolio para Distintas Estrategias de Inversión, dado $Corr = 1$



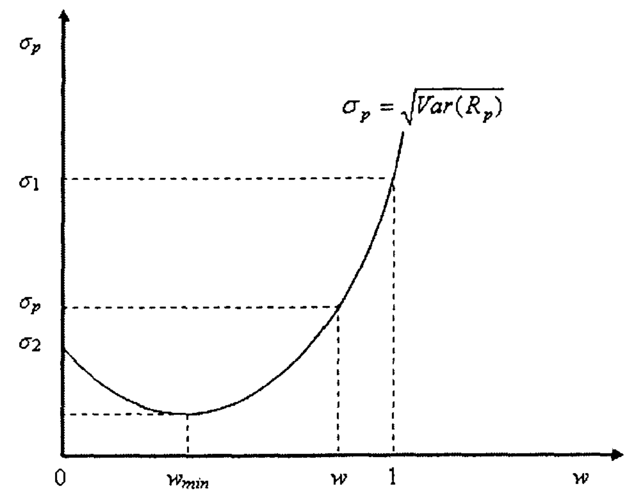
cuando $Corr(R_1, R_2) = -1$. La figura 2.5 muestra la relación entre volatilidad de la cartera y la estrategia de inversión para $Corr(R_1, R_2) = -1$.

Figura 2.5: Riesgo del Portafolio para Distintas Estrategias de Inversión, dado $Corr = -1$



Dijimos antes que el retorno esperado de un portafolio será siempre el promedio ponderado de los retornos esperados de los activos individuales que lo componen. Acabamos de ver que, en general, la volatilidad del portafolio será menor que el promedio ponderado de las volatilidades de los activos que lo componen. Cuanto menor sea la volatilidad relativa del portafolio respecto al promedio ponderado de las volatilidades individuales dependerá de la correlación entre los activos. Entonces, el efecto diversificación viene dado exclusivamente por la correlación entre los activos. Podemos decir así que diversificar el riesgo implica reducir el riesgo del portafolio, sin sacrificar su retorno esperado, mediante la inclusión de activos que están imperfectamente correlacionados. La figura 2.6 muestra la relación entre la volatilidad y la estrategia de inversión para $-1 < Corr(R_1, R_2) < 1$.

Figura 2.6: Riesgo del Portafolio para Distintas Estrategias de Inversión, dado $-1 < Corr < 1$.



Usted debe darse cuenta que esta función estará siempre en el triángulo formado por la línea recta entre σ_2 y σ_1 cuando $Corr(R_1, R_2) = 1$, y la ángulo formado entre σ_2 y σ_1 cuando $Corr(R_1, R_2) = -1$. Mientras más cerca se esté de $Corr(R_1, R_2) = -1$ más curva será la relación; y, por tanto, más fuerte será la diversificación. Usted ve además en este gráfico la estrategia de inversión w_{min}, que corresponde a aquella que hace que la volatilidad del portafolio sea mínima, dada una correlación. Esta estrategia de inversión se determina buscando el mínimo de la varianza a través de $\frac{\delta Var(R_p)}{\delta w} = 0$. Realizando este cálculo simple, tenemos que el *portafolio de mínima* *varianza* de un portafolio de dos activos se forma con la estrategia:

$$w_{min} = \frac{Var(R_2) - Cov(R_1, R_2)}{Var(R_1) + Var(R_2) - 2Cov(R_1, R_2)}$$

Como ejercicio, usted debería comprobar tres cosas. Primero que cuando $Corr(R_1, R_2) = -1$, tenemos que $w_{min} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$, la estrategia que permite eliminar todo el riesgo determinada arriba. Segundo, que el retorno esperado y la varianza del portafolio de mínina varianza para los activos 1 y 2 corresponde a $E(R_p) = 7,56\,\%$ y $\sigma_p = 2,26\,\%$. Finalmente, muestre que aún cuando w_{min} representa el portafolio con el menor riesgo posible, dada la correlación entre los activos 1 y 2, el individuo caracterizado arriba preferirá el portafolio con $w = 0,5$.

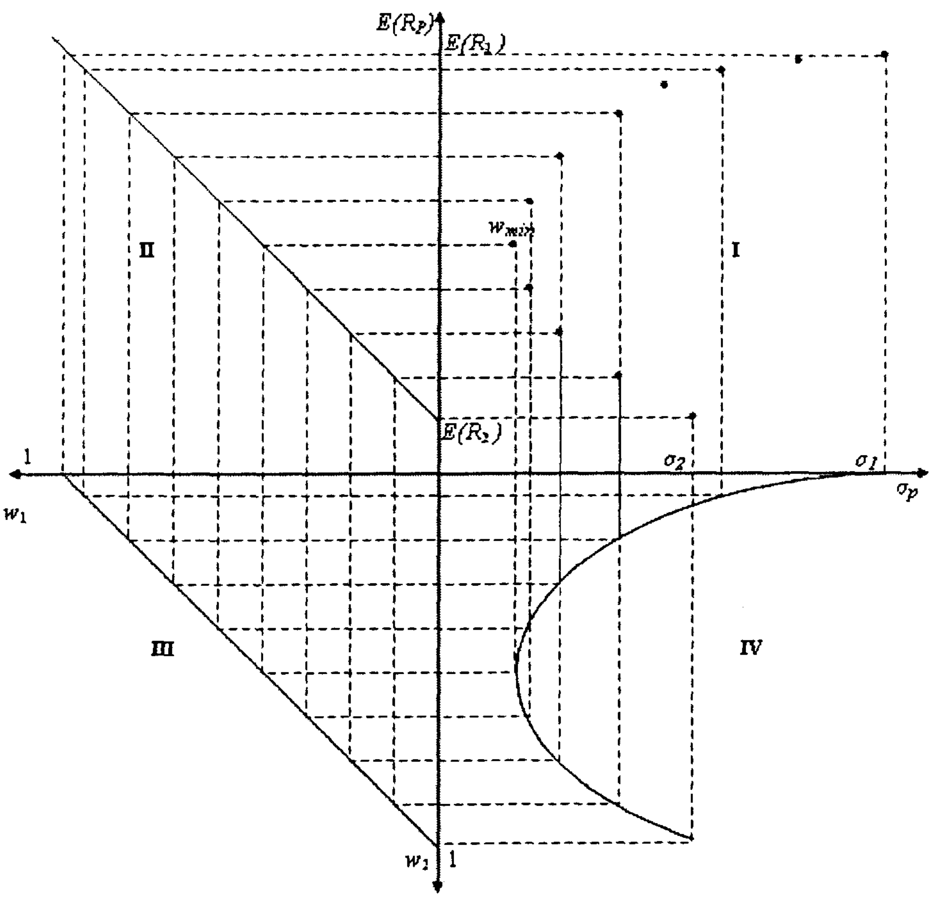
Frontera de Mínima Varianza

Hasta ahora hemos visto que la estrategia de inversión determina el retorno esperado y el riesgo del portafolio; las figuras 2.3 y 2.6 muestran esta asociación, pero en forma separada. Nos queda finalmente por determinar las combinaciones de retorno esperado y riesgo factibles dadas las características de los activos. La figura 2.7 corresponde a un diagrama de cuatro cuadrantes, donde los cuadrantes II y IV corresponden a las figuras 2.3 y 2.6 respectivamente. Note que por simplicidad suponemos que sólo hay dos activos y que no hay venta corta. El cuadrante III corresponde a la restricción de inversión dada por $w_1 + w_2 = 1$. Es decir, todos los puntos en la recta cumplen con la restricción que la riqueza es invertida totalmente.

El resultado que nos interesa está en el cuadrante I. Usted puede ver que al ir variando la estrategia de inversión en el cuadrante III (a lo largo de la línea recta) obtenemos una proyección en el cuadrante I a través de las funciones de los cuadrantes II y IV. La línea punteada del cuadrante I corresponde a las combinaciones de retorno esperado y riesgo que se pueden formar con los dos activos para distintas estrategias de inversión. Esta línea curva del cuadrante I es lo que llamamos *Frontera de Mínima Varianza*. Usted debe notar que cada punto de esta función corresponde a una estrategia de inversión $[w_1, w_2]$ distinta, y que no es posible formar un portafolio con una combinación de retorno esperado y riesgo que esté por encima de esta frontera. Además, recordando nuestra discusión anterior sobre la diversificación, tenemos que mientras más curva sea la función del cuadrante IV (mayor diversificación), más curva será la frontera de mínima varianza, pasado siempre de pendiente positiva a negativa en el portafolio de mínima varianza[5].

[5]Usted debe diferenciar entre el "portafolio" de mínima varianza y la "frontera" de mínima varianza. El primero

Figura 2.7: Frontera de Mínima Varianza



2.2.2. Portafolio de n Activos

Hasta ahora hemos trabajado con portafolios de dos activos para poder capturar la intuición de los resultados con gráficos. Corresponde ahora generalizar el análisis a portafolios de n activos. Usted verá que las principales lecciones obtenidas hasta ahora permanecen inalteradas. Con n activos, el portafolio personal queda caracterizado por:

$$\widetilde{R}_p = w_1\widetilde{R}_1 + w_2\widetilde{R}_2 + ... + w_n\widetilde{R}_n$$

donde $w_1, w_2, ..., w_n$ es la estrategia de inversión.

corresponde a un punto dentro del segundo.

El retorno esperado y la varianza del portafolio corresponden a[6]:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$$
$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(R_i, R_j) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 Var(R_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1_{j\neq i}}^{n} w_i w_j Cov(R_i, R_j)$$

donde $Cov(R_i, R_j)$ es la covarianza entre los activos i y j. Recuerde que $Cov(R_i, R_i) = Var(R_i)$ corresponde a la varianza del retorno del activo i. Note que la varianza del portafolio está formada por n términos de varianza y $n(n-1)$ términos de covarianza.

Varianza Marginal

Como vimos antes, la volatilidad de una cartera es, en general, menor que el promedio ponderado de las volatilidades individuales. Este fenómeno fue atribuido a la diversificación. Para completar esta idea, expresemos convenientemente la varianza del portafolio como:

$$\begin{aligned} Var(R_p) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(R_i, R_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Cov(R_i, R_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i Cov(R_i, R_p) \end{aligned}$$

de donde podemos ver que la varianza del portafolio corresponde al promedio ponderado de las covarianzas entre los retornos de los activos individuales y el portafolio como un todo. Entonces, la contribución del activo i al riesgo del portafolio *no es la varianza del activo i* sino que la *varianza marginal del activo i*:

[6]El tratamiento con matrices es mucho más simple, y permite realizar cálculos tediosos con planillas de cálculo. Para quienes entiendan operatoria con matrices, el retorno esperado y la varianza del portafolio quedan dados por:

$$E(R_p) = \mathbb{W}^T \mathbb{R}$$
$$Var(R_p) = \mathbb{W}^T \mathbb{V} \mathbb{W}$$

para un vector de $n \times 1$ de retornos esperados $\mathbb{R}$, una matriz de varianza-covarianza simétrica y definida positiva $\mathbb{V}$ de $n \times n$ y un vector de estrategia de inversión $\mathbb{W}$ de $n \times 1$.

$$Cov(R_i, R_p) = w_1 Cov(R_i, R_1) + w_2 Cov(R_i, R_2) + ... + w_i Var(R_i) + ... + w_n Cov(R_i, R_n)$$

Es decir, la varianza del portafolio corresponderá al promedio ponderado de las varianzas marginales de los activos. Podemos decir entonces que el riesgo de un activo desde el punto de vista de un portafolio p es su varianza marginal. Por ejemplo, para un portafolio de dos activos, las varianzas marginales son:

$$Cov(R_1, R_p) = w_1 Var(R_1) + w_2 Cov(R_1, R_2)$$
$$Cov(R_2, R_p) = w_1 Cov(R_2, R_1) + w_2 Var(R_2)$$

Usted puede verificar que:

$$Var(R_p) = w_1 Cov(R_1, R_p) + w_2 Cov(R_2, R_p) = w_1^2 Var(R_1) + w_2^2 Var(R_2) + 2w_1 w_2 Cov(R_1, R_2)$$

la expresión que habíamos presentado antes para la varianza del portafolio de dos activos.

Tres elementos son importantes de destacar. Primero, *el riesgo de un activo (varianza marginal) no es único*, ya que dependerá del portafolio de referencia que estemos usando para medirlo: un mismo activo tendrá distintas varianzas marginales con distintos portafolios. En este sentido, el riesgo inherente de cualquier activo individual en un portafolio es distinto al riesgo de este activo cuando se mantiene en forma individual. Segundo, en un portafolio con muchos activos, el término que incluye la varianza del activo $w_i Var(R_i)$ pasa a ser un término insignificante dentro del total de términos que componen la varianza marginal del activo i. Así, lo más relevante para incluir el activo i en un portafolio no será probablemente su varianza sino que las covarianzas que tenga este activo con los demás activos individuales del portafolio $Cov(R_i, R_j)$, $i \neq j$. Este es el efecto diversificación visto antes con sólo dos activos. Finalmente, como la varianza del portafolio es el promedio ponderado de las varianzas marginales, para la estrategia de inversión que minimiza la varianza (portafolio de mínima varianza) debe ser cierto que las varianzas marginales de todos los activos sean iguales, $Cov(R_i, R_p) = Cov(R_j, R_p) \ \forall i \neq j$. Si esto no es así, es posible encontrar otro portafolio que tenga una varianza menor.

Frontera de Mínima Varianza

Sólo nos resta caracterizar el conjunto de oportunidades de inversión de mínima varianza para n activos. Éste está definido como el conjunto de portafolios que, dado un nivel de retorno esperado, tienen la mínima varianza. Formalmente, para un retorno esperado objetivo $E(\overline{R})$ debemos encontrar un portafolio $w_1, w_2, ..., w_n$ que cumpla con:

$$Min\ Var(R_p)_{[w_1,w_2,...,w_n]} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(R_i, R_j)$$

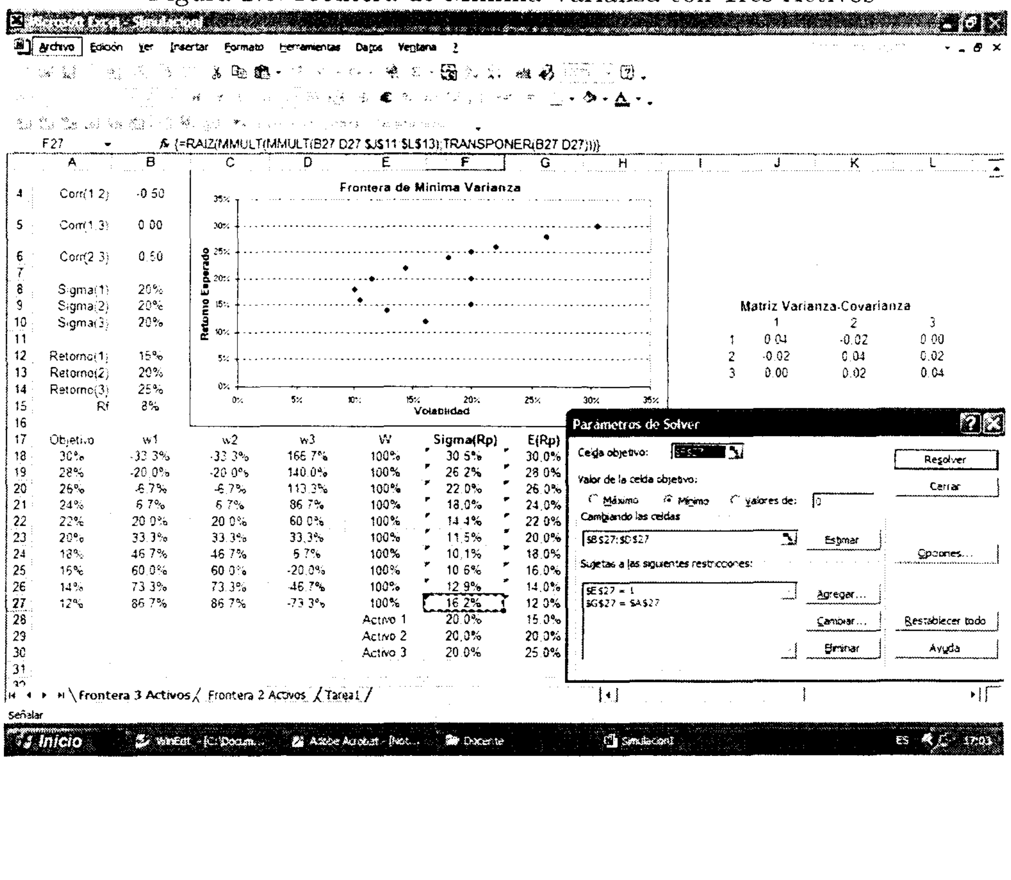
$$Sujeto\ a\ las\ restricciones:$$

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) = E(\overline{R})$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Aún cuando el tratamiento analítico es posible, su complejidad está fuera del alcance de este documento docente. Así, sólo realizamos el planteamiento formal del problema, y presentamos brevemente la manera de solucionarlo con SOLVER, el optimizador de Microsoft Excel (Herramientas/Solver).

Figura 2.8: Frontera de Mínima Varianza con Tres Activos



La figura 2.8 muestra la frontera de mínima varianza con tres activos obtenida a través de SOLVER. Note que incluso en este caso donde los tres activos usados tienen la misma volatilidad, la frontera contiene portafolios con una volatilidad menor. Claramente la situación presentada aquí para tres activos es fácilmente generalizable a cualquier número de activos. La ventana "Parámetros de Solver" muestra como se obtuvo el último punto de la frontera, correspondiente a la fila 27 de la planilla. En la celda objetivo está la celda que contiene la fórmula de la volatilidad del portafolio. Más abajo se indica que se quiere minimizar el valor de la celda objetivo cambiando las celdas de ponderación de inversión de cada activo B27:D27. Note que las restricciones corresponden a las planteadas arriba. Este proceso se repitió para cada fila desde la 18 hasta la 27, donde cada fila corresponde a un punto de la frontera de mínima varianza. Un ejercicio que usted debe realizar es replicar estos resultados en Excel para estar seguro que entiende la mecánica del proceso; esto le será de utilidad para seguir con más facilidad el material de la próxima sección. Un último punto de interés es que en este caso no se impuso restricción a la venta corta de activos. Esto se puede ver en que algunas ponderaciones son $w_i < 0$. Lo único que estamos diciendo es que es posible vender un activo que no se posee a través de un préstamo de un agente que sí la posee. Es decir, nos prestan un activo riesgoso, lo vendemos, luego al finalizar el período de inversión lo recompramos para devolverlo a quien nos lo prestó. De esta manera hemos usado un activo que no poseíamos, siendo esto equivalente a un préstamo.

2.3. La Estrategia Óptima de Inversión del Individuo

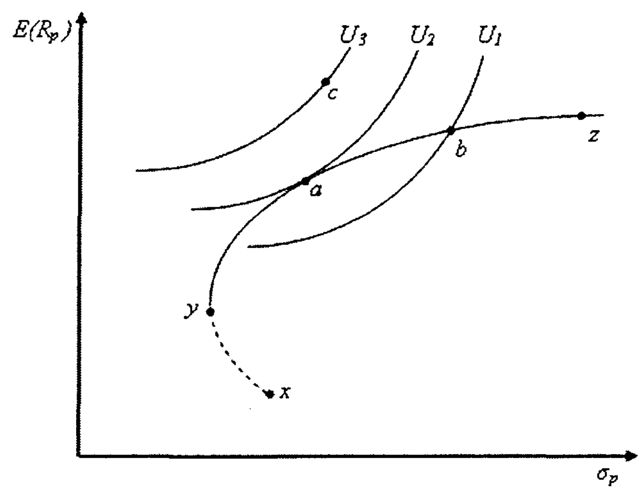
Hasta ahora podemos decir que los individuos invierten su riqueza en el portafolio de activos que tenga una combinación de retorno esperado y volatilidad que maximice su bienestar. El individuo intentará maximizar $E(R_p) - \frac{RRA}{2}Var(R_p)$. Sin embargo, esta maximización de bienestar está sujeta a las restricciones tecnológicas impuestas por la disponibilidad de activos en la economía. En otras palabras, habrán portafolios con combinaciones de retorno esperado y volatilidad muy deseables para el consumidor, pero que no son factibles de alcanzar dadas la disponibilidad de activos para el individuo. Esta restricción viene dada por la frontera de mínima varianza.

2.3.1. Frontera Eficiente y Elección Individual

Nos preguntamos ahora, ¿qué estrategia de inversión escogerá el individuo? Note que esto es equivalente a preguntarse ¿en qué punto de la frontera de mínima varianza se ubicará el individuo?. Aunque la respuesta precisa a esta pregunta requiere conocer las preferencias del individuo, sabemos que *los individuos aversos al riesgo se ubicarán en el segmento con pendiente positiva de la frontera de mínima varianza.* Esta conclusión deriva del hecho que los portafolios ubicados en la parte inferior de la frontera de mínima varianza son dominados (menos preferidos) por los portafolios del segmento superior. Note que para un nivel de riesgo determinado, lo portafolios del segmento superior entregan siempre un retorno esperado mayor. Por esta razón, este segmento superior se denomina *frontera eficiente.* Podemos entonces decir que los individuos aversos al riesgo siempre escogerán un portafolio que pertenezca a la frontera eficiente.

La figura 2.9 muestra la frontera de mínima varianza (segmento xyz) y la frontera eficiente (segmento yz). Note que la frontera eficiente corresponde a la frontera de mínima varianza desde el portafolio de mínima varianza (w_{min}, caracterizado por el punto y) hacia arriba.

Figura 2.9: Frontera Eficiente y Elección Individual



En la figura 2.9 vemos además las curvas de indiferencia de un individuo tipo. Suponga que el individuo escoge la estrategia $w_1^b, w_2^b, ..., w_n^b$ reflejada en el punto b en la frontera eficiente. Usted puede ver que en este caso, en individuo no está en la curva de indiferencia más alta (máximo bienestar) que él puede alcanzar. Portafolios ubicados más a la izquierda del punto b, a través de la frontera eficiente, son más preferidos ya que así es posible alcanzar curvas de indiferencia más altas. Usted también debe darse cuenta que, dada la disponibilidad de activos para este individuo, es imposible ubicarse en la curva de indiferencia U_3. Por ejemplo, el portafolio c es claramente preferido al portafolio b y al portafolio a. Sin embargo, los activos disponibles no permiten obtener un portafolio con la combinación de retorno esperado y riesgo como la del portafolio c.

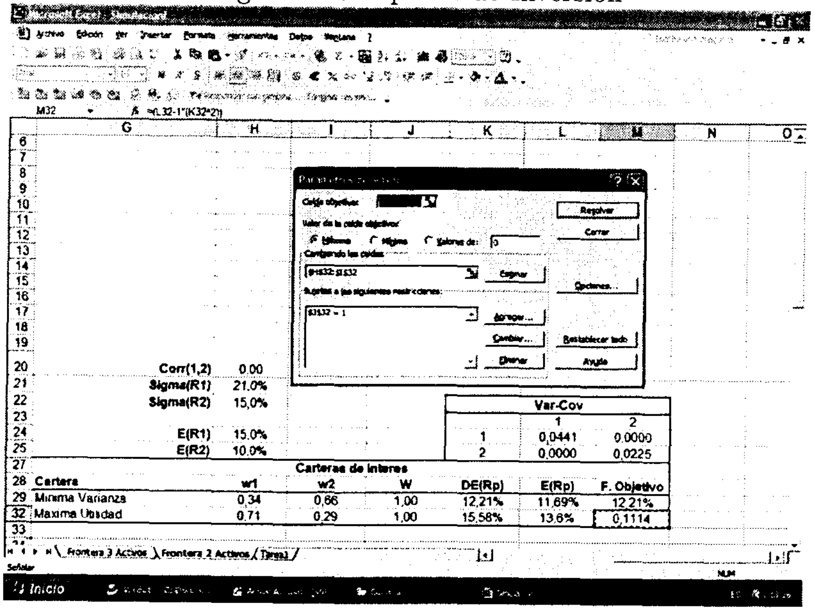
Seguramente usted ya habrá deducido que el portafolio que permite obtener un máximo bienestar el caracterizado por la estrategia de inversión $w_1^a, w_2^a, ..., w_n^a$, el punto a en la figura 2.9. Note que no es posible obtener un portafolio factible que dé un bienestar mayor. Una condición que caracteriza el equilibrio del consumidor está dado por la igualdad de las pendientes de la curva de indiferencia y la frontera eficiente. En términos simples, en el equilibrio se debe cumplir que la tasa a la cual el individuo en forma subjetiva está dispuesto a intercambiar retorno por riesgo ($\frac{\Delta E(R_p)}{\Delta \sigma_p}$) es exactamente igual a la tasa (objetiva) a la cual los activos disponibles permiten intercambiar retorno por riesgo.

Intuitivamente podemos predecir que individuos más aversos al riesgo (mayor RRA) que el individuo tipo caracterizado en la figura 2.9 se ubicarán óptimamente a la izquierda del punto a. Por ejemplo, suponga dos individuos con preferencias representadas por $U_k = E(R_p) - \frac{RRA_k}{2} Var(R_p)$, donde $ARA_A = 6$ y $ARA_B = 2$; el individuo A es más averso que el individuo B. Asuma por simplicidad que estos individuos formarán sus portafolios sólo con dos activos riesgosos. Estos activos están caracterizados por: $E(R_1) = 15\%$, $E(R_2) = 10\%$, $\sigma_1 = 21\%$, $\sigma_2 = 15\%$ y $Cov(R_1, R_2) = 0$. Note que buscamos w_1 y w_2 que maximicen $U_k = E(R_p) - \frac{RRA_k}{2} Var(R_p)$. Tenemos que los portafolios óptimos para cada individuo son:

Individuo	w_1	w_2	$E(R_p)$	σ_p	U_k
A — RRA=6	46 %	54 %	12,3 %	12,63 %	0,075
B — RRA=2	71 %	29 %	13,6 %	15,58 %	0,111
Mínima Varianza	34 %	66 %	11,69 %	12,21 %	

Vemos así que, como era de esperar, el individuo más averso forma un portafolio con un porcentaje menor en el activo 1. La obtención de estos óptimos de inversión es un proceso simple. La figura 2.10 muestra esta maximización para el segundo individuo usando el optimizador SOLVER.

Figura 2.10: Óptimo de Inversión



Alternativamente, podemos usar cálculo diferencial para obtener el óptimo. Como sólo hay dos activos, $w_2 = 1 - w_1$, y $E(R_p) = w_1 E(R_1) + (1 - w_1)E(R_2) = f(w_1)$ y $Var(R_p) = w_1^2 Var(R_1) + (1 - w_1)^2 Var(R_2) = f(w_1)$. Tenemos que, al reemplazar, $U_k = f(w_1)$. El valor óptimo de w_1 se obtiene de la ecuación $\frac{\delta U_k(w_1)}{\delta w_1} = 0$. Claramente con n activos los cálculos pueden ser un poco tediosos. A esta altura usted debería ser capaz de replicar estos resultados sin problemas con SOLVER.

2.3.2. El Activo Libre de Riesgo y Las Decisiones del Individuo

Un último elemento que debemos incluir para completar este capítulo es la existencia de un activo libre de riesgo. Hasta ahora hemos supuesto que sólo existían activos riesgosos $\sigma_i > 0$. Recuerde que al invertir en un activo libre de riesgo, sabemos con certeza la rentabilidad r_f que obtendremos al final del período de inversión. Por lo tanto, $\sigma = 0$ y la covarianza del activo libre de riesgo con cualquier activo riesgoso es también cero. La pregunta relevante es entonces, ¿cómo cambia la elección si existe, además de los n activos riesgosos, un activo libre de riesgo?. Para contestar esta pregunta asumamos que el portafolio de activos riesgosos es:

$$\widetilde{R}_x = w_1\widetilde{R}_1 + w_2\widetilde{R}_2 + ... + w_n\widetilde{R}_n$$

Por lo tanto, el portafolio personal no incluirá sólo activos riesgosos como habíamos supuesto hasta ahora, $\widetilde{R}_p \neq \widetilde{R}_x$ en general. Ahora el portafolio personal incluirá además al activo libre de riesgo:

$$\widetilde{R}_p = \alpha\widetilde{R}_x + (1-\alpha)rf$$

Note que lo que estamos haciendo es separar la decisión en dos: a) la proporción α a invertir en activos riesgosos, y b) del monto destinado a activos riesgosos, la proporción que se invierte en cada uno de estos activos. Note que del total de la riqueza, la proporción invertida en el activo riesgoso i será αw_i. Igual que antes, el retorno esperado y la varianza del portafolio personal están dados por:

$$\begin{aligned}
E(R_p) =& \alpha E(R_x) + (1-\alpha)r_f = r_f + \alpha(E(R_x) - r_f) \\
Var(R_p) =& \alpha^2 Var(R_x) \quad \Rightarrow \sigma_p = \alpha\sigma_x
\end{aligned}$$

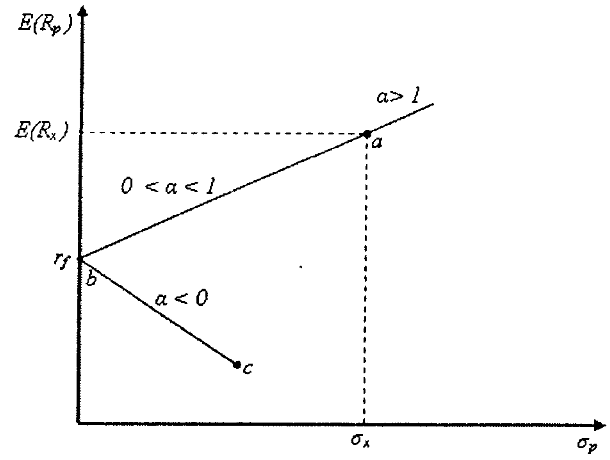
Note que $0 < \alpha < 1$ indica que parte de la riqueza se invierte en activos riesgosos y parte en el activo libre de riesgo; en ambos activos la posición es larga (compramos los activos). Cuando $\alpha > 1$, se invertirá más del 100 % de la riqueza en activos riesgosos y, por lo tanto, se requerirá un préstamo (o posición corta) de $1-\alpha < 0$ a la tasa libre de riesgo. Finalmente si $\alpha < 0$, tendremos una posición corta (venta corta) en el portafolio de activos riesgosos y se invertirá más que el 100 % en el activo libre de riesgo. La figura 2.11 muestra el retorno esperado y la volatilidad de portafolio personal para los distintos casos.

Usted debe haber reparado en el hecho que ningún individuo averso al riesgo escogerá $\alpha \nless 0$ ya que el segmento bc es dominado por los portafolios del segmento ab. La pendiente de la recta que une r_f y el portafolio personal se denomina Índice de Sharpe y viene dada por:

$$Sharpe = \frac{\delta E(R_p)}{\delta\sigma_p} = \frac{\frac{\delta E(R_p)}{\delta\alpha}}{\frac{\delta\sigma_p}{\delta\alpha}} = \frac{E(R_x) - r_f}{\sigma_x}$$

Vemos así que el Índice de Sharpe corresponde a la razón entre la *prima por riesgo* del portafolio de activos riesgosos $(E(R_x) - r_f)$ y el riesgo de este portafolio.

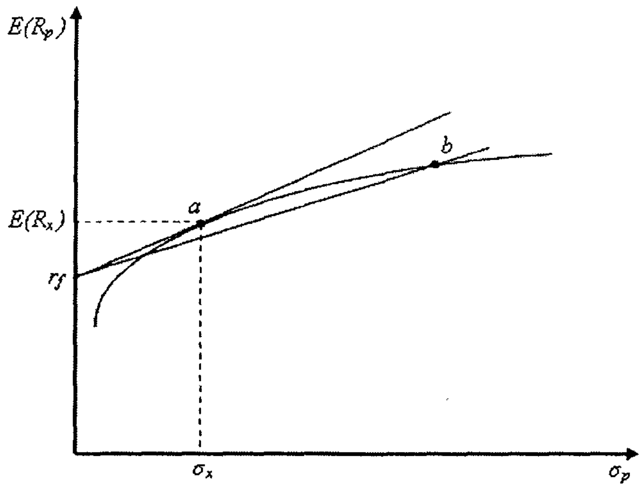
Figura 2.11: Portafolio Personal con Activo Libre de Riesgo



Intuitivamente podríamos predecir que individuos más aversos al riesgo tendrán $0 < \alpha < 1$. Es decir, invertirán una parte en activos libres de riesgo como una manera de reducir su exposición al riesgo del portafolio de activos riesgosos ($\sigma_p < \sigma_x$). Por otro lado, individuos muy tolerantes al riesgo estarán dispuestos a endeudarse a la tasa libre de riesgo ($\alpha > 1$) para aumentar su exposición al riesgo del portafolio de activos riesgosos ($\sigma_p > \sigma_x$). Una vez entendida la mecánica del problema, nos queda por definir la composición del portafolio $\widetilde{R}_x$. Es decir, la estrategia de inversión en activos riesgosos, dada la existencia de un activo libre de riesgo.

En la figura 2.12 vemos las posibilidades de inversión dadas por el activo libre de riesgo y el conjunto de activos riesgosos. Ambas líneas rectas son factibles, ya que incluyen el activo libre de riesgo y un portafolio de activos riesgosos ubicado en la frontera eficiente. Usted puede ver que el portafolio a de activos riesgosos permite obtener un conjunto de oportunidades de inversión más amplio que el portafolio b. En efecto, no existe ningún otro portafolio en la frontera eficiente que, combinado con el activo libre de riesgo, permita un conjunto de oportunidades de inversión lineal más amplio que el portafolio a. En pocas palabras, en este contexto maximizamos las posibilidades de inversión cuando obtenemos un portafolio de activos riesgosos $w_1, w_2, ..., w_n$ que maximiza la pendiente de la *frontera eficiente lineal.* Este portafolio (a) se denominará el *portafolio de tangencia.*

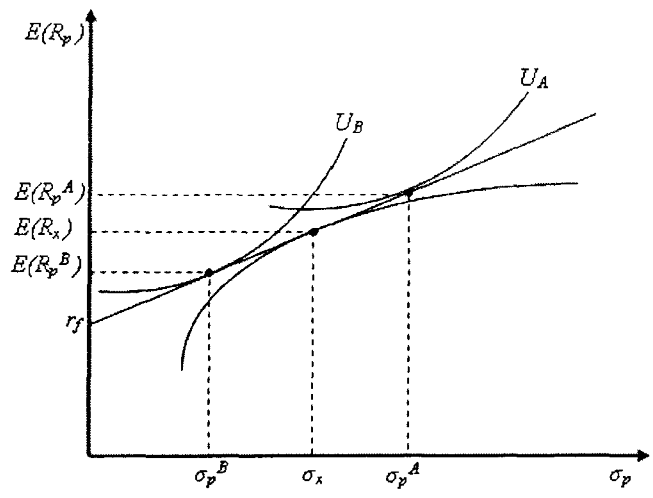
Figura 2.12: Portafolio de Tangencia



Dos elementos son importantes sobre el portafolio de tangencia. Primero, la frontera eficiente lineal domina a la frontera eficiente formada solamente con activos riesgosos. Esto puede verse al notar que para cada nivel de riesgo, la frontera lineal entrega retornos esperados mayores. Así, la posibilidad de prestar y pedir prestado (montos ilimitados) a la tasa libre de riesgo mejora el bienestar de los inversionistas. Segundo, para determinar el portafolio de tangencia no se necesitó conocer las preferencias de los individuos. Dada una frontera eficiente de activos riesgosos, todos los individuos estarán deacuerdo en el mismo portafolio de tangencia, independiente de las preferencias. Todos estarán deacuerdo en que lo óptimo es combinar el portafolio de tangencia con el activo libre de riesgo.

Dado este resultado, la decisión de conformación del portafolio de activos riesgosos, al no ser una decision subjetiva, es delegable en manos de un administrador profesional de portafolios. Una vez definido el portafolio óptimo de activos riesgosos (portafolio de tangencia), los individuos puede armar sus portafolios personales combinando este portafolio con el activo libre de riesgo dependiendo de las preferencias individuales. Esta separación entre la decisión técnica (portafolio de tangencia, $w_1, w_2, ..., w_n$) y la decisión personal (portafolio personal, $\alpha, (1-\alpha)$) está plasmada en el *teorema de separación* o *teorema del fondo mutuo*.

Figura 2.13: Elección Individual con Activo Libre de Riesgo



La figura 2.13 muestra la decisión individual para dos individuos distintos. Note que ambos individuos combinan el activo libre de riesgo con el mismo portafolio óptimo de activos riesgosos (teorema de separación). Sin embargo, el individuo A se endeuda a la tasa libre de riesgo, $\alpha > 1$, para lograr un portafolio personal con un perfil de retorno esperado-riesgo acorde a sus preferencias. Lo contrario pasa con el individuo B, $0 < \alpha < 1$. Formalizando nuestra discusión, tenemos que cuando hay posibilidad de prestar y pedir prestado a la tasa libre de riesgo, la decisión de inversión puede ser separada en dos :

1. **Decisión de Asignación de Activos:** determinar el portafolio de activos riesgosos que maximiza en Índice de Sharpe. Dado que $E(R_x)$ y σ_x son función de la estrategia de inversión $[w_1.w_2, ..., w_n]$, lo que nos interesa es buscar la estrategia que maximize:

$$Sharpe = f(w_1, w_2, ..., w_n) = \frac{E(R_x) - r_f}{\sigma_x}$$

con lo que tendremos el portafolio de tangencia:

$$\widetilde{R}_x = w_1^* \widetilde{R}_1 + w_2^* \widetilde{R}_2 + ... + w_n^* \widetilde{R}_n$$

Como en este portafolio de tangencia se maximiza la razón entre la prima por riesgo del portafolio riesgoso y su volatilidad (Índice de Sharpe), se debe cumplir que:

$$\frac{E(R_i) - r_f}{Cov(R_i, R_x)} = \frac{E(R_j) - r_f}{Cov(R_j, R_x)} \quad \forall i \neq j$$

Es decir, la razón entre la prima por riesgo del activo y su varianza marginal es igual para todos los activos del portafolio. Si esto no se cumple, es posible rebalancear el portafolio y obtener un Indice de Sharpe mayor.

2. **Decisión de Asignación de Capital:** una vez determinado el portafolio de tangencia, determinamos el portafolio personal $[\alpha, (1-\alpha)]$ que maximiza el bienestar del individuo:

$$U = f(\alpha) = E(R_p) - \tfrac{RRA}{2} Var(R_p)$$

Dado $E(R_x)$ y σ_x, tenemos que maximizar $U(\alpha) = r_f + \alpha(E(R_x) - r_f) - \frac{RRA}{2}\alpha^2 Var(R_x)$. Derivando e igualando a cero ($\frac{dU(\alpha)}{d\alpha} = 0$), obtenemos:

$$\alpha^* = \frac{E(R_x) - r_f}{RRA \times Var(R_x)}$$

con lo que formamos el portafolio óptimo a nivel individual:

$$\widetilde{R}_p = \alpha^* \widetilde{R}_x + (1 - \alpha^*) rf$$

Note que la proporción óptima invertida en activos riesgosos (α^*) será mayor cuando: a) la prima por riesgo del portafolio riesgoso es mayor, b) el individuo es más tolerante al riesgo y c) el riesgo del portafolio riesgoso es menor.

Tomemos el mismo ejemplo usado para determinar el portafolio óptimo cuando no existía acceso al activo libre de riesgo para mostrar ambas decisiones. Asuma que $r_f = 8\,\%$ y todos los datos anteriores. Los resultados obtenidos con SOLVER se muestran en la tabla siguiente.

	w_1	w_2	$E(R_x)$	σ_x	Sharpe
Portafolio de Tangencia	64 %	36 %	13,21 %	14,50 %	0,359

	α	$1-\alpha$	$E(R_p)$	σ_p	U_k
Individuo A - RRA=6	41 %	59 %	10,15 %	5,98 %	0,091
Individuo B - RRA=2	124 %	-24 %	14,44 %	17,95 %	0,112

El portafolio de tangencia tiene un Índice de Sharpe 0,359. No olvide que no existe otro portafolio con un Índice de Sharpe mayor. Por lo tanto, ambos individuos concordarán en que éste es el portafolio óptimo de activos riesgosos que será combinado con posiciones cortas o largas en el activo libre de riesgo.

Como era de esperar, el individuo más averso al riesgo ($RRA = 6$) en el óptimo invierte una proporción menor en activos riesgosos, $\alpha^* = 0,41$. Este individuo invierte su riqueza como sigue:

26,24 % en el activo 1, 14,76 % en el activo 2, y 59 % en el activo libre de riesgo. De la misma manera podemos ver que el individuo B, invierte: 79,36 % en el activo 1, 44,64 % en el activo 2, y pide un préstamo por el equivalente al 24 % de su riqueza para financiar su inversión en activos riesgosos. Como último punto, verifique que la existencia del activo libre de riesgo permite a los individuos alcanzar un mayor nivel de bienestar. Compare los niveles de utilidad presentados en ésta y la tabla anterior. Usted debe replicar estos resultados con SOLVER para verificar que entiende la mecánica de los cálculos. Identifique a ambos individuos en la figura 2.13.

Hemos completado las lecciones de este capítulo. Con algunos supuestos, se ha podido establecer los elementos que determinan la demanda por activos riesgosos a nivel individual. Sólo nos queda agregar estas demandas individuales y obtener un equilibrio para la economía. Esto nos permitirá establecer los determinantes del precio de mercado del riesgo. Éste será el foco del próximo capítulo.

Capítulo 3: Equilibrio de Mercado

Una de las principales lecciones derivadas de la discusión del capítulo anterior era que la diversificación permite reducir el riesgo de nuestro portafolio de riqueza personal sin sacrificar retorno esperado. La diversificación no implica repartir nuestra riqueza en muchos activos con retornos independientes, sino que invertir en activos que tengan retornos con correlación imperfecta (menor que 1) entre si. Esta diferencia sutil es importante porque existen factores de riesgo que influencian a los activos en forma transversal y, por tanto, los retornos de los activos estarán correlacionados hasta cierto punto. Así entonces, la diversificación no permitirá eliminar todo el riesgo de un activo, sino que sólo aquella porción del riesgo que no está correlacionada con factores macroeconómicos que influencian a todos los activos de la economía. Bajo esta observación, el riesgo total de un activo puede ser separado en:

$$Riesgo\,Total\;Activo\,i \;=\; Riesgo\;Sistematico \;+\; Riesgo\;Unico$$

donde *Riesgo Unico* corresponde a aquella porción del riesgo total eliminable en una cartera bien diversificada; y *Riesgo Sistematico* corresponde a la parte del riesgo que no puede ser diversificada pues depende de factores que afectan los retornos de todos los activos de la economía (en mayor o menor grado).

En este capítulo nos basamos en los principios derivados de la teoría de portafolios para construir el equilibrio del mercado de capitales. Buscamos responder una cuestión fundamental en finanzas, ¿cuál debe ser el retorno exigido en equilibrio a un activo dado su nivel de riesgo? En particular, los desarrollos de este capítulo nos permitirán presentar la ecuación de equilibrio del Capital Asset Pricing Model (CAPM). Este modelo fue desarrollado en los 60, y se basa en la idea que no todo el riesgo de un activo afecta su precio. Sólo aquel componente no diversificable (riesgo sistemático) debería ser valorado por los inversionistas, ya que el *Riesgo Unico* es por definición eliminable sin costo. En este sentido, el retorno exigido a un activo en equilibrio –y, por tanto su precio– sólo depende del nivel de riesgo sistemático del activo.

3.1. Caracterización del equilibrio de mercado

La teoría de portafolio discutida en el capítulo anterior prescribe que los inversionistas (racionales, aversos al riesgo y optimizadores en media-varianza) elegirán sus portafolios óptimos de activos riesgosos (*asset allocation decision*) de entre aquellos disponibles en la frontera eficiente. Note, sin embargo, que la frontera eficiente resulta de las creencias o expectativas que el individuo tenga sobre la rentabilidad, volatilidad y correlaciones entre los retornos de los activos riesgosos disponibles. Luego, la existencia de un activo libre de riesgo permite al individuo escoger un portafolio personal que se ajuste a su sistema de preferencias individuales (*capital allocation decision*). Este análisis, sin embargo, no prohibe que los individuos tengan expectativas o creencias distintas sobre la distribución de probabilidades conjunta que genera los retornos de los activos. En este sentido, como una manera de simplificar nuestra construcción del equilibrio de mercado suponemos que:

Supuesto 1: Los individuos tienen acceso a las mismas posibilidades de inversión y expectativas homogéneas en relación a los retornos esperados, volatilidades y covarianzas entre los activos riesgosos disponibles.

Supuesto 2: El horizonte de planeación es el mismo para todos los inversionistas. Además, durante este período la oferta de activos riesgosos está fija (no hay nuevas emisiones de activos).

Note que estos supuestos implican que todos los agentes en la economía enfrentan la misma frontera eficiente. Suponemos finalmente que:

Supuesto 3: El mercado de capitales es perfecto en el sentido que: a) todos los activos disponibles son infinitamente divisibles; b) no existen costos de transacción, restricciones a la venta corta de activos ni impuestos; c) la información está disponible para todos sin costo; d) los individuos con su accionar no afectar la distribución de probabilidades de los activos (agentes tomadores de precios); e) y los individuos pueden prestar y pedir prestado montos ilimitados a la tasa de interés libre de riesgo r_f.

Estos supuestos en conjunto implican que el portafolio óptimo de activos riesgosos (aquél que maximiza el Índice de Sharpe) es el mismo para todos los individuos. Es decir, la proporción relativa de inversión (w_i) en cada activo riesgoso es la misma para todos los individuos en el óptimo. Bajo estos supuestos, el equilibrio del mercado de capitales debería estar caracterizado por dos condiciones elementales:

1. El precio de mercado de cada activo riesgoso debe ser el que iguala la demanda de cada activo riesgoso con la oferta disponible de este activo. En equilibrio, entonces, todos los activos riesgosos deben ser demandados por alguien, ya que de lo contrario su precio de mercado subirá o bajará hasta que el exceso de demanda por el activo sea cero. Podemos concluir que el portafolio óptimo de activos riesgosos de la economía debe incluir todos los activos riesgosos ofrecidos en un momento del tiempo. Por esto entonces, este portafolio será denominado el Portafolio de Mercado, portafolio que será caracterizado por la letra M en la frontera eficiente.

2. La tasa de interés del instrumento libre de riesgo debe ser tal que la oferta de ahorro (a la tasa libre de riesgo) debe ser igual a la demanda de ahorro[1]. Es decir, a nivel agregado debemos tener que el agente promedio (o representativo) de la economía no ahorra ni desahorra. Note que si el exceso de demanda por fondos a la tasa libre de riesgo no es cero, entonces la tasa r_f prevaleciente en el mercado no puede ser de equilibrio.

La figura 3.1 muestra la caracterización del equilibrio. La recta LMC representa la Línea del Mercado de Capitales, y resulta de unir la tasa de interés libre de riesgo de equilibrio con el portafolio de mercado de la economía (M).

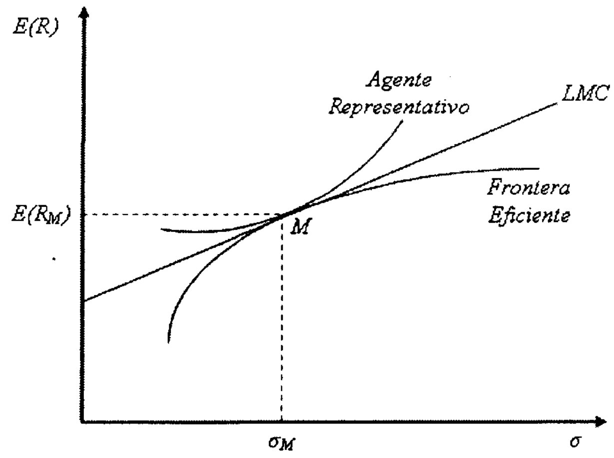
Tres elementos emergen del equilibrio del mercado de capitales presentado aquí. Primero, considerando que el ahorro neto de la economía es cero en equilibrio, el retorno esperado del portafolio de mercado, $E(R_M)$, corresponde al retorno esperado de la riqueza total (riesgosa) de la economía durante el horizonte de planeación:

$$E(R_M) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \ldots + w_n E(R_n) = \frac{E(W_1)}{W_0} - 1$$

donde $E(W_1)$ corresponde al valor esperado de la riqueza total de la economía al final del período, W_0 corresponde a la riqueza total de la economía hoy, y n corresponde al número

[1] Claramente esta condición corresponde a una economía cerrada.

Figura 3.1: Equilibrio Agregado



total de activos disponibles en la economía. Tenemos así que el retorno esperado del portafolio de mercado depende exclusivamente del proceso estocástico –asumido exógeno– que genera la riqueza futura de la economía.

Segundo, la ponderación (w_i) que cada activo tiene en la cartera de mercado en equilibrio debe corresponder a la proporción que el activo representa dentro de la riqueza agregada de la economía. En forma equivalente, podemos decir que esta proporción corresponde a la capitalización de mercado del activo dividida por la capitalización de mercado de todos los activos riesgosos disponibles en la economía. Esto es fácil de visualizar si recordamos que, bajo el supuesto de expectativas homogéneas, todos los individuos invertirán la misma proporción relativa (w_i) en cada activo riesgoso. Con esto, la demanda agregada por el activo i (en valor) será $w_i W_0$, donde W_0 es la riqueza total de la economía hoy. Por otro lado, la oferta del activo i en valor corresponde al precio de mercado del activo hoy (p_i) multiplicado por el número de activos en circulación (q_i) en el mercado de capitales. Entonces, de la condición de equilibrio obtenemos que:

$$w_i W_0 = p_i q_i \Rightarrow w_i = \frac{p_i q_i}{W_0} = \frac{p_i q_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}$$

Vemos así que la conformación del portafolio de mercado depende exclusivamente del stock de activos riesgosos disponibles en la economía.

Finalmente al tener que en equilibrio el ahorro neto de la economía (a la tasa libre de riesgo) es cero, podemos visualizar que para el agente representativo o promedio se debe cumplir que $\alpha = 1$ en la decisión de capital allocation. Si recordamos del capítulo anterior, la decisión óptima de capital allocation estaba dada a nivel individual por:

$$\alpha^* = \frac{E(R_M) - r_f}{RRA \times Var(R_M)}$$

donde el portafolio óptimo de activos riesgosos corresponde al portafolio de mercado (M). Podemos ver así que como a nivel agregado $\alpha = 1$, la prima por riesgo del portafolio de mercado está dada por:

$$E(R_M) - r_f = \overline{RRA} \times Var(R_M) \tag{3.1}$$

Donde vemos que la prima por riesgo del portafolio de mercado (riqueza de la economía) está dada, en equilibrio, por la aversión al riesgo promedio de los agentes (RRA promedio ponderado, ponderado por la riqueza individual) y por el riesgo del portafolio de mercado. Note que la tasa de interés libre de riesgo de equilibrio nace de la tangencia entre la curva de indiferencia del agente representativo y la frontera eficiente. Por lo tanto, si el agente representativo de la economía aumenta inesperadamente la tolerancia al riesgo, la tasa de interés libre de riesgo debe aumentar (o la prima por riesgo del mercado disminuir) para reestablecer nuevamente el equilibrio. Finalmente, podemos ver que como el portafolio de mercado está, por definición, bien diversificado, entonces $Var(R_M)$ corresponde sólo a riesgo sistemático.

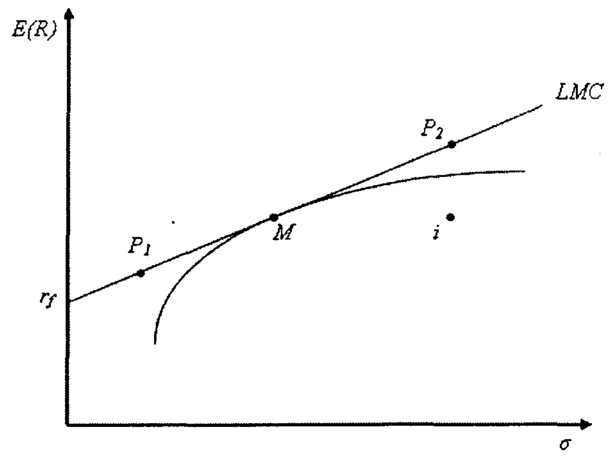
3.2. Ecuaciones de equilibrio

En la figura 3.2 vemos nuevamente caracterizado el equilibrio. Recuerde que, dado el teorema de separación presentado en el capítulo anterior, la única decisión que toman los individuos corresponde al portafolio que se ajusta a sus preferencias individuales:

$$R_p = \alpha R_M + (1 - \alpha) r_f$$

Es decir, cada individuo formará su cartera de inversión personal como una combinación del portafolio de mercado y el activo libre de riesgo, donde su variable de decisión es la estrategia de inversión α. En la figura 3.2 se representa la cartera personal de dos individuos (P_1 y P_2) con distinta aversión al riesgo ($\alpha_1 < 1$ y $\alpha_2 > 1$). Vemos entonces que los individuos se ubicarán siempre en la Línea del Mercado de Capitales (LMC) y, por lo tanto, sus carteras personales

Figura 3.2: Línea del Mercado de Capitales



estarán bien diversificadas ya que éstas son función del portafolio de mercado de la economía. Es fácil mostrar que las carteras ubicadas a lo largo de la LMC están perfectamente correlacionadas con el portafolio de mercado y que la recta LMC está caracterizada por:

$$E(R_p) = r_f + \left[\frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M}\right] \sigma_p$$

Esta ecuación (LMC) nos dice cuánto debería ser el retorno exigido en equilibrio a una cartera bien diversificada. Tenemos entonces que la prima por riesgo de las carteras bien diversificadas dependen de: a) la prima por unidad de riesgo sistemático, y b) la cantidad de riesgo sistemático de la cartera. Debemos hacer notar que la prima por unidad de riesgo (o precio de mercado por unidad de riesgo) se determina a nivel agregado, pero es exógena para los agentes a nivel individual.

Considerando que la ecuación LMC nos indica el retorno esperado en equilibrio para portafolios bien diversificados –aquellos que no tienen riesgo único–, ¿podríamos extrapolar esta ecuación y usarla para determinar el retorno exigido de un activo individual, por ejemplo el activo i en la figura 3.2? Mostremos con un ejemplo que la respuesta a esta pregunta es negativa. Suponga la situación extrema en que usted invierte en dos activos que tienen igual retorno esperado de 15 %, la misma volatilidad ($\sigma_1 = \sigma_2$), pero una correlación menor que 1. Note que el retorno esperado de la cartera, $E(R_x)$, que incluye ambos activos será siempre 15 %, independiente de la estrategia de inversión que usted elija. Sin embargo, el efecto de la diversificación visto en el capítulo anterior nos indica que en general $\sigma_x < w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2$ si la correlación entre los activos es menor que 1. Podemos ver en este caso que hemos formado un nuevo activo (la cartera) que tiene el mismo retorno esperado que los activos individuales, pero a la vez un riesgo total menor. Esto resulta en una contradicción si es que el retorno esperado de los activos depende de su riesgo total ya que, en este caso, existen al menos dos activos con igual retorno esperado, pero con riesgo total distinto. Claramente, en equilibrio estos activos no pueden coexistir si el riesgo total (volatilidad) es la medida relevante de riesgo.

La contradicción recién descrita es evidente en la figura 3.2 donde el activo i tiene el mismo retorno esperado que el portafolio de mercado, pero una mayor volatilidad (riesgo total). Por otro lado, vemos que el activo i tiene la misma volatilidad del portafolio p_2, pero un menor retorno esperado. ¿Cómo podemos reconciliar esto con el hecho que el activo i es un activo que está en equilibrio?. La clave está en reconocer que la volatilidad del portafolio de mercado y el portafolio p_2 en la figura 3.2 corresponde exclusivamenete a riesgo no diversificable (sistemático); por otro lado, la volatilidad del activo i tiene un componente que es eliminable vía diversificación y, por lo tanto, desde el punto de vista de un inversionista bien diversificado esta porción no es riesgo propiamente tal.

Para determinar la medida de riesgo relevante de un activo individual i que forma parte de una cartera bien diversificada, partamos de la situación de equilibrio ya descrita. Como discutimos antes, en equilibrio el activo i forma parte de la cartera de mercado (M) y su ponderación corresponde a w_i. Sin perder generalidad, imaginemos un agente que tiene una cartera óptima a nivel personal caracterizada justamente por el portafolio de mercado $R_p = R_M$. Este individuo tiene la posibilidad de invertir una fracción adicional muy pequeña δ en el activo i, financiando esta operación con endeudamineto a la tasa libre de riesgo. Note que esta operación llevará a invertir $w_i + \delta$ en el activo i; es decir, el individuo piensa sobreponderar marginalmente el activo i dentro de su cartera personal. Con esto la nueva cartera R_p' estará dada por:

$$R_p' = R_M + \delta R_i - \delta r_f$$

Claramente, este individuo hará esto sólo si la recompensa marginal que obtiene en términos de retorno esperado, $\Delta E(R_p)$, es suficiente para compensar el costo marginal representado por el aumento en riesgo de la cartera, $\Delta Var(R_p)$. Vemos que:

$$\begin{aligned} E(R_p') = E(R_M) + \delta E(R_i) - \delta r_f &\Rightarrow \Delta E(R_p) = \delta\left[E(R_i) - r_f\right] \\ Var(R_p') = Var(R_M) + \delta^2 Var(R_i) + 2\delta Cov(R_M, R_i) &\Rightarrow \Delta Var(R_p) \approx 2\delta Cov(R_M, R_i) \\ \therefore \frac{\Delta E(R_p)}{\Delta Var(R_p)} &= \frac{E(R_i) - r_f}{2Cov(R_M, R_i)} \end{aligned}$$

Así, en equilibrio, debe ser cierto que esta relación entre el beneficio y el costo de sobreponderar un activo cualquiera en la cartera personal es igual entre todos los activos disponibles en la economía. De lo contrario, habrían posibilidades de rebalancear la cartera personal y mejorar al individuo –situación que es inconsistente con un equilibrio inicial[2]. Considerando que el individuo descrito arriba estaba en equilibrio con una cartera personal igual al portafolio de mercado, entonces:

$$\frac{E(R_i) - r_f}{Cov(R_M, R_i)} = \frac{E(R_M) - r_f}{Var(R_M)}$$

Por ejemplo, si la relación anterior para el activo i fuese mayor que la correspondiente del portafolio de mercado, sería conveniente comprar más del activo i. Esto conllevaría a un aumento en su demanda y su precio hoy, lo que haría bajar su retorno esperado hasta que la razón iguale a la correspondiente del portafolio de mercado. Utilizando esta condición, tenemos que el retorno esperado del activo i debe corresponder –en equilibrio– a:

$$\begin{aligned} E(R_i) &= r_f + \left[E(R_M) - r_f\right] \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)} \\ E(R_i) &= r_f + \left[E(R_M) - r_f\right] \beta_i \end{aligned}$$

Esta ecuación corresponde al Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM, por su sigla en inglés). El modelo prescribe que la medida de riesgo relevante para un activo individual no corresponde a su volatilidad o varianza, sino que el coeficiente $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)}$ asociado al activo. Si usted observa, esto es perfectamente consistente con las ideas presentadas en el capítulo anterior donde establecimos que la contribución que un activo individual hace al riesgo de una cartera bien diversificada corresponde a la varianza marginal $Cov(R_i, R_M)$ del activo.

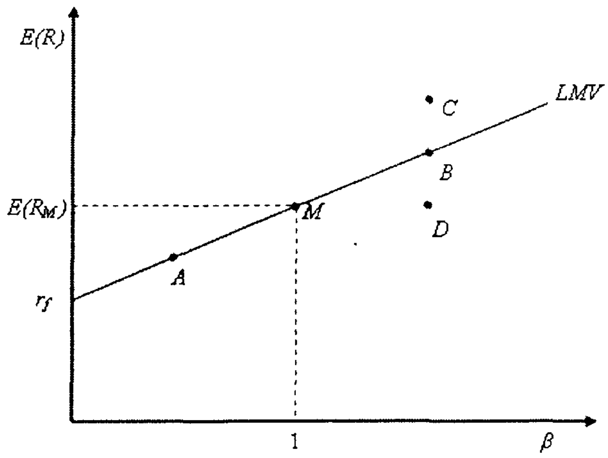
[2] Usted debe haber reparado que esta idea ya fue presentada en el capítulo anterior. Esto es así porque la estrategia de inversión en activos riesgosos que maximiza el Indice de Sharpe debe satisfacer que: $\frac{E(R_i)-r_f}{Cov(R_i,R_x)} = \frac{E(R_j)-r_f}{Cov(R_j,R_x)}$

3.3. Implicancias del CAPM

El modelo CAPM nos indica que los activos que estén muy correlacionados con la riqueza de la economía –y que, por lo tanto, tengan un alto β– deberán ofrecer en equilibrio una prima por riesgo mayor. Lo contrario pasa con activos que tienen una baja correlación con el portafolio de mercado. La intuición detrás de este resultado fundamental es simple. Considerando que la riqueza tiene por propósito financiar el patrón de consumo futuro, es muy razonable pensar que los activos que sufren caídas en estados de la naturaleza donde la riqueza de los individuos también cae sean poco valorados por los individuos. Entonces, dado que los agentes están dispuestos a pagar poco hoy (bajo precio) por los activos muy correlacionados con la riqueza, el retorno exigido (o prima por riesgo) en equilibrio para estos activos resulta ser alto. La idea de cubrirse en los escenarios donde la riqueza cae, lleva a los individuos a buscar (y demandar) activos que no sufran pérdidas –o idealmente que obtengan ganancias– en escenarios de la naturaleza donde la riqueza cae. Dado que estos activos con baja (o negativa) correlación con la riqueza (y por lo tanto con bajo β) generan cobertura ante caídas en la riqueza, estos serán más apetecidos por los individuos, y su precio hoy será más alto. Esto claramente conlleva a que los individuos estarán dispuestos a aceptar una prima por riesgo más baja por estos activos debido a sus bondades en términos de cobertura. Dada esta discusión, ¿puede un activo teóricamente tener un β negativo?

La figura 3.3 presenta la Línea de Mercado de Valores (LMV), recta que caracteriza el retorno esperado en equilibrio (retorno exigido) de los activos en función de su riesgo sistemático medido por β. Note que el β del portafolio de mercado es siempre 1. Por otro lado, los activos con $\beta > 1$, por ejemplo el activo B en la figura 3.3, son activos agresivos en el sentido que amplifican los movimientos del mercado (al alza o a la baja). Activos como el activo A en la figura 3.3 son activos defensivos pues su β es menor que 1; estos activos defensivos amortiguan los vaivenes del mercado como un todo. Esta distinción es importante desde el punto de vista de la gestión activa de carteras de inversión porque si usted es capaz de predecir, antes que todos los demás agentes del mercado, la dirección del movimiento del mercado, usted podría sobreponderar en su cartera los activos con $\beta > 1$ si usted sabe que el mercado va al alza, y sobreponderar activos con $\beta < 1$ si usted sabe que el mercado va a la baja. Esta estrategia activa de inversión es lo que se conoce como Market Timing; y obviamente la posibilidad de ganar un retorno por sobre el exigido en equilibrio a través de esta estrategia dependerá de su habilidad en la predicción del

Figura 3.3: Linea del Mercado de Valores



signo de la variación del mercado, antes que todos los demás agentes del mercado.

El CAPM predice entonces que en equilibrio todos los activos deben estar, ex ante, en la Línea del Mercado de Valores. Podemos ver en la figura 3.3 que los activos C y D no están en equilibrio. Por ejemplo, el activo C tiene un retorno esperado mayor que el retorno exigido en equilibrio según su β. Note que el activo B y C tienen el mismo riesgo sistemático, pero distinto retorno esperado. Esto obviamente no puede ser una situación sostenible. La dinámica de ajuste hacia el equilibrio obedece a las acciones de agentes que descubren estos desequilibrios. El hecho que el activo C tenga un retorno esperado mayor que el retorno exigido en equilibrio es equivalente a decir que su precio hoy es menor que el precio de equilibrio. A medida que los agentes descubren este activo "barato" o subvaluado lo comenzarán a comprar. Este aumento en la demanda hace subir hoy el precio del activo, y por ende hace bajar su retorno esperado hasta que la rentabilidad esperada del activo sea exactamente igual a la rentabilidad exigida en equilibrio. La misma dinámica corregirá el retorno esperado del activo D, el cual es actualmente un activo "caro" o sobrevalorado.

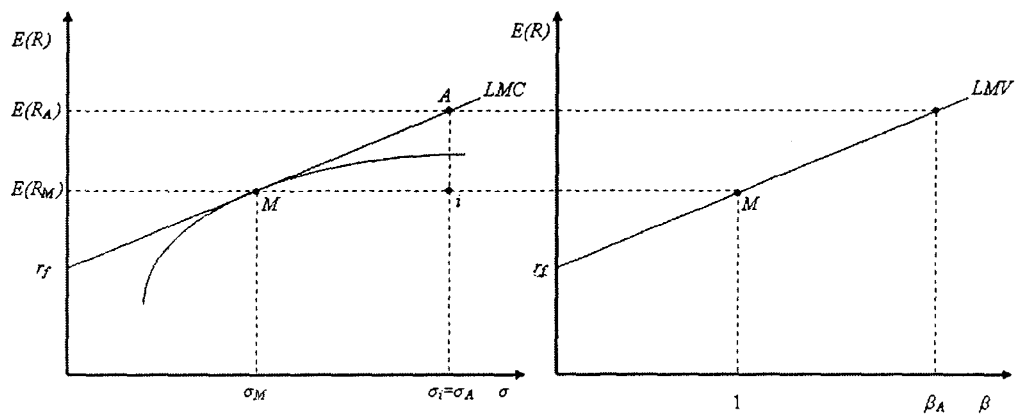
El hecho que la Línea del Mercado de Valores sea una línea recta tiene una importante implicancia para la formación de portafolios con activos existentes. La intuición nos dice que, partiendo de activos en equilibrio (ubicados en la LMV), no debería ser posible formar una cartera que resulte en un desequilibrio. Es decir, una cartera formada con activos en equilibrio debe estar también en equilibrio (en la LMV). Considerando que el retorno esperado de una cartera es siempre el promedio ponderado de los retornos esperados de los activos individuales, debe ser cierto entonces que:

$$\beta_P = w_1\beta_1 + w_2\beta_2 + \ldots + w_n\beta_n$$

Es decir, el β de la cartera debe corresponder al β promedio ponderado de los βs de los activos que componen la cartera. Esta es la única manera que los portafolio formados con activos en equilibrio tambien estén en equilibrio.

Tenemos entonces que según el CAPM, la única variable que explica el diferencial de retorno esperado en equilibrio entre los activos existentes es el β de los activos. Un aspecto importante de destacar es el hecho que un activo en equilibrio (ubicado en la LMV) no tiene por que estar necesariamente en la Línea del Mercado de Capitales. Es decir, el hecho que un activo esté en equilibrio no implica necesariamente que este activo no tenga riesgo único o diversificable.

Figura 3.4: Equilibrio versus Eficiencia en media-varianza



En la figura 3.4 vemos el caso del activo i. Si usted observa, el activo i tiene un retorno esperado exactamente igual que el retorno esperado del portafolio de mercado. Esto implica que como este activo está en equilibrio, su β debe ser exactamente igual a 1, el β del portafolio del mercado. Esto queda claro al observar que tanto el portafolio de mercado como el activo i están representados por el mismo punto en la LMV. Usted habrá notado también que la volatilidad del activo i es mayor que la volatilidad del portafolio de mercado, aún cuando ambos tienen el mismo coeficiente β. ¿Cómo podemos reconciliar esto?. La respuesta radica en el hecho que la volatilidad del portafolio de mercado –que como ya dijimos es un portafolio diversificado– sólo corresponde a riesgo sistemático. Sin embargo, la volatilidad del activo i tiene una parte que corresponde a riesgo único. Note que la manera de reconciliar estas observaciones es reconocer que la diferencia $\sigma_i - \sigma_M$ corresponde al riesgo único o diversificable del activo i.

Otra observación importante que emerge de la figura 3.4 es que un activo que está en la Línea del Mercado de Capitales necesariamente está en la Línea del Mercado de Valores. Por ejemplo, el portafolio A puede corresponder a la cartera personal de un individuo más tolerante al riesgo que el agente promedio de la economía ($\alpha > 1$). Esta cartera está construida al combinar el portafolio de mercado con una posición corta (endeudamiento) en el activo libre de riesgo. Por esta razón, las carteras ubicadas en la LMC están por definición bien diversificadas; lo que equivale a decir que su volatilidad (σ_A) corresponde exclusivamente a riesgo sistemático. Considerando esto, podemos fácilmente demostrar la consistencia entre la ecuación de equilibrio descrita por la LMC y aquella descrita por el CAPM (LMV). Según el CAPM, el retorno esperado en equilibrio de la cartera A está descrito por:

$$E(R_A) = r_f + [E(R_M) - r_f]\,\beta_A$$

Dado que la correlación entre la cartera A y la cartera de mercado es 1, podemos ver que:

$$\begin{aligned}
E(R_A) &= r_f + [E(R_M) - r_f]\,\frac{Cov(R_A, R_M)}{Var(R_M)} \\
E(R_A) &= r_f + [E(R_M) - r_f]\,\frac{\sigma_A \sigma_M}{Var(R_M)} \\
E(R_A) &= r_f + \left[\frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M}\right] \sigma_A
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que ambas ecuaciones de equilibrio son consistentes, siempre y cuando el activo bajo estudio corresponda a una cartera bien diversificada. Sin embargo, usted notará que el uso de la ecuación del CAPM es más general, pues permite valorar tanto activos eficientes como activos ineficientes. Esta discusión sobre el efecto que tiene la correlación del activo con el portafolio de mercado puede ser resumida al reconocer que:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)} = \frac{\sigma_i}{\sigma_M} Corr(R_i, R_M)$$

donde $Corr(R_i, R_M)$ corresponde a la correlación entre el activo i y el portafolio de mercado. Reemplazando $\beta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_M} Corr(R_i, R_M)$ en la ecuación del CAPM, obtenemos:

$$\frac{E(R_i) - r_f}{\sigma_i} = Corr(R_i, R_M) \times \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M}$$

Con lo que podemos establecer que en equilibrio el Indice de Shape de cualquier activo individual i con $Corr(R_i, R_M) < 1$ será, ex-ante, menor que el Índice de Sharpe del portafolio de mercado. Presentado de otra manera, el portafolio de mercado tiene el máximo Índice de Sharpe de la economía ex-ante, y solamente activos perfectamente correlacionados con el mercado (ubicados en la LMC) tendrán ex-ante el mismo Índice de Sharpe.

3.4. Comentarios sobre el CAPM

Presentado el modelo de equilibrio CAPM en su versión más simple, en esta sección discutiremos dos cuestiones que ayudarán al lector a ponderar las bondades y limitaciones del CAPM. Primero, y considerando los supuestos que hicimos para desarrollar la ecuación de equilibrio, es relevante discutir las limitaciones que el modelo puede tener desde el punto de vista teórico. En segundo lugar, es imperativo que el lector se forme una idea del éxito empírico que el CAPM ha tenido al momento de testear las principales predicciones del modelo. Por cierto, una discusión profunda de estos temas requeriría una nota docente completa. En este sentido, lo que sigue es una discusión descriptiva de las cuestiones que se cree relevante mencionar antes de terminar este capítulo.

3.4.1. Extensiones del CAPM

Desde el punto de vista teórico, algunos autores han extendido el CAPM, relajando algunos de los supuestos bajo los cuales éste fue desarrollado. A continuación se describen las extensiones teóricas clásicas que ha tenido el CAPM[3].

[3] Un modelo que por su similitud con las predicciones presentadas anteriormente no será abordado aquí es el CAPM de consumo (C-CAPM). Este modelo tiene un sustento microeconómico mucho más fuerte que el CAPM aquí descrito pues asume directamente que la variable de interés para los individuos es el consumo (y no la riqueza). Por consiguiente, el riesgo de cada activo en este modelo está asociado con la cobertura que el activo provee ante shocks en el patrón de consumo de los individuos. Sin embargo, la intuición subyacente a ambos modelos es la misma; de hecho es posible demostrar que ambos modelos son equivalente bajo ciertas condiciones.

La primera extensión propuesta a comienzo de los 70 por F. Black tiene que ver con la posibilidad de prestar y pedir prestado a una tasa libre de riesgo; dicho de otra manera, con la existencia de la LMC tal como la vimos en este capítulo. Conservando el supuesto de expectativas homogéneas sobre la distribución de probabilidad conjunta de los retornos de los activos de la economía, es aún posible sostener que los individuos escogerán sus portafolios personales de entre los disponibles en la frontera eficiente de activos riesgosos. Dado que los portafolios de activos individuales serán eficientes en media-varianza, el portafolio de mercado que corresponde al agregado de los portafolios individuales (eficientes) será, según las matemáticas del set eficiente, eficiente en media-varianza. Con este resultado es posible teóricamente formar un portafolio con $\beta = 0$ a partir de los activos existentes en la economía. Note que como la correlación entre los activos es normalmente positiva, la conformación de este portafolio con β cero requiere la existencia de venta corta de activos. Este portafolio, caracterizado por R_Z, será equivalente al activo libre de riesgo[4]. Tenemos entonces que el CAPM bajo este escenario estará dado por:

$$E(R_i) = E(R_Z) + [E(R_M) - E(R_Z)]\beta_i$$

donde $E(R_Z)$ representa el retorno asociado al portafolio con β cero, y reemplaza al activo libre de riesgo en la formulación original del CAPM. Tenemos así que, permitiendo venta corta, la no existencia del activo libre de riesgo no altera la principal predicción del CAPM: que el portafolio de mercado es eficiente en media-varianza.[5] Hay que notar, sin embargo, que el CAPM de Black sólo establece que la relación entre el retorno esperado y el β es positiva. En contraste, el modelo original es más restrictivo en el sentido que establece que la prima por unidad de riesgo (β) debe corresponder a $E(R_M) - r_f$.

El CAPM asume que todos los activos son transables y perfectamente divisibles. Esto claramente no es cierto, y es evidente al observar, por ejemplo, que los estudiantes y trabajadores jóvenes tienen gran parte de su riqueza personal en la forma de capital humano (no transable ni divisible). Otro ejemplo claro está en el hecho que pequeños empresarios tienen su portafolio

[4]En teoría hay infinitos portafolios que tienen cero correlación con el portafolio de mercado. Entonces el portafolio caracterizado por R_Z es aquel que además se encuentra en la frontera de mínima varianza, siendo este portafolio único.

[5]Es importante enfatizar que al no existir un instrumento libre de riesgo ni venta corta de activos, el portafolio de mercado puede no ser eficiente, aún cuando los portafolios individuales sean eficientes en media-varianza. Por lo tanto, la sobrevivencia teórica del CAPM está supeditada al supuesto de expectativas homogeneas y al cumplimiento de al menos uno de estos supuestos.

personal muy concentrado en un activo no transable ni divisible: su negocio. Mayers a comienzo de los 70 analizó el efecto que activos no transables tienen en la ecuación fundamental del CAPM. Aún cuando los elementos de fondo del modelo CAPM se mantienen intactos a nivel de equilibrio, él encuentra que la prima por riesgo de un activo estará asociada no sólo con la covarianza que el activo tiene con el conjunto de activos transables sino que también con la covarianza que el activo tiene con el conjunto de activos no transables. Claramente en este escenario el riesgo de un activo estará dado por la contribución que éste hace al riesgo del portafolio de activos transables y al riesgo del portafolio de activos no transables a nivel agregado. Una implicancia importante derivada de este modelo –que contrasta con los resultados anteriores– es que en este caso los individuos no mantendrán el mismo portafolio de activos riesgosos (el mercado), sino que sus tenencias de activos riesgosos transables dependerán de las características de su portafolio de activos no transables. Por ejemplo, un joven corredor de bolsa tiene gran parte de su portafolio de riqueza personal en la forma de capital humano (no transable); estando éste muy expuesto a los vaivenes de la bolsa de valores. Considerando esta situación, este individuo no debería invertir su riqueza remanente (ahorros) en activos transados en bolsa, sino que buscar activos transables con baja (o negativa) correlación con los activos transados en la bolsa de valores. La misma lógica aplica para un empresario pequeño, quien debería ahorrar a través de instrumentos transables que lo protejan de shocks que afectan a las empresas pequeñas y shocks que afecten al sector industrial de su propio negocio[6].

El CAPM original es un modelo de un período. Más aún, se asume que el horizonte de planeación es común para todos los agentes. A comienzos de los 1970s, R. Merton relaja este supuesto y permite transacciones en forma contínua. Este modelo recibe el nombre del CAPM intertemporal (I-CAPM). Merton muestra que si la rentabilidad del instrumento libre de riesgo es constante a través del tiempo, entonces la ecuación básica del CAPM se mantiene intacta con la salvedad que ahora las tasas de rentabilidad corresponden a retornos compuestos contínuamente. Sin embargo, si la tasa del instrumento libre de riesgo no es constante –es decir, es estocástica– entonces, aparte del riesgo de mercado clásico del CAPM, nace el riesgo de movimientos inesperados en la tasa de interés libre de riesgo a través del tiempo. Este factor adicional de riesgo implica que el set de posibilidades de inversión (LMC) varía a través del tiempo. Bajo esta condi-

[6]Note que estas recomendaciones tienen mucha aplicación en las decisiones de inversión financiera de los individuos, en particular en la decisión relativa al multifondo en el cual cada persona debería invertir sus ahorros previsionales.

ción, Merton muestra que nacerán demandas por activos que provean cobertura ante cambios en el set de oportunidades de inversión. Es decir, activos que provean cobertura ante cambios en el set de oportunidades de inversión serán transados a un mayor precio, ofreciendo en equilibrio una prima por riesgo más baja que lo que el CAPM de un período predice. Alternativamente, los activos que provean pobre cobertura ante estos shocks en la tasa de interés libre de riesgo deberán ofrecer en equilibrio una prima por riesgo mayor que la que el CAPM de un período predice. Una consecuencia importante del I-CAPM es que éste abre la posibilidad de que aparte del β que un activo puedá tener con el portafolio de mercado, existan βs con variables asociadas al movimiento del set de oportunidades de inversión (state variables). Es decir, en este modelo se mantiene la relación entre el retorno esperado y el riesgo medido por β, pero aquí se requerirán βs adicionales al β del mercado para explicar los diferenciales de retorno esperado entre los activos (modelo multifactor).

En lo que hemos revisado, las extensiones del CAPM parecen no alterar en forma sustancial las predicciones básicas del CAPM. Note, sin embargo, que las extensiones (especialmente el I-CAPM) pueden limitar su aplicación en su forma original. Una condición que sí afecta y potencialmete invalida la principal predición del CAPM –que el portafolio de mercado es ex-ante eficiente en media-varianza– está asociada al supuesto de expectativas homogéneas. Al haber expectativas heterogéneas (todos vemos distintas fronteras eficientes), los agentes escogerán distintos portafolios óptimos de activos riesgosos (en base a sus propias expectativas). Esto lleva a que el portafolio de mercado pasa a ser un complejo promedio de portafolios sobre distintas fronteras eficientes. Bajo esta condición, es posible que el portafolio de mercado no sea eficiente en media-varianza. Sin embargo, a pesar del atractivo teórico de este argumento, esta proposición no es testeable. Es más, esto sólo deja en evidencia que una prueba empírica del modelo CAPM requiere suponer en forma conjunta dos hipótesis: a) que el CAPM es válido, b) que el portafolio de mercado es eficiente en media-varianza ex-ante. Considerando que el portafolio de mercado no es observable –y por lo tanto no podemos establecer su eficiencia en media-varianza ex-ante– entonces el modelo CAPM es inherentemente un modelo que no puede ser testeado. Esta es la base de la crítica de R. Roll, y será el marco de la discusión de la sección que sigue.

Aún cuando este capítulo está dedicado al CAPM, es importante traer a la luz otro modelo de valoración de activos propuesto a mediados de los 70 por S. Ross: la Teoría de Valoración por Arbitraje (APT, por su sigla en inglés). A diferencia el CAPM, el APT no es un modelo de equilibrio sino que un modelo que valora activos bajo el principio de no-arbitraje. Es decir, si dos activos tienen los mismos flujos en cada uno de los estados futuros probables de la naturaleza, entonces estos activos deben tener hoy el mismo precio. En este sentido, si es posible a través de los activos existentes replicar el *payoff* de un activo, entonces a través de este portafolio replica (*mimicking portfolio*) podemos valorar el activo. El APT establece que el retorno esperado de un activo corresponde a:

$$E(R_i) = r_f + [\delta_1 - r_f]b_{i1} + [\delta_2 - r_f]b_{i2} + \ldots + [\delta_k - r_f]b_{ik}$$

donde $b_{ik} = \frac{Cov(R_i, \delta_k)}{Var(\delta_k)}$ es la sensibilidad (*factor loading*) del activo i al riesgo macroeconómico k, δ_k corresponde al retorno esperado del portafolio que replica el factor de riesgo macroeconómico k[7], y $[\delta_k - r_f]$ corresponde a las prima por riesgo asociada al factor de riesgo k. Note que el modelo CAPM puede ser visto como un APT con un factor de riesgo, el mercado. Sin embargo, los modelos están basados en principios absolutamente distintos. De hecho, el APT no requiere los supuestos del CAPM, siendo sólo necesario suponer una gran cantidad de activos y la condición de no arbitraje; condiciones mucho menos restrictivas que las que requiere el CAPM.

A pesar del atractivo del APT, éste no individualiza los factores de riesgo. Lo único que sabemos es que estos deben corresponder a factores de riesgo sistemático. Técnicas estadísticas (componentes principales o análisis factorial) pueden ayudar a extraer factores sistemáticos a partir de los retornos de los activos, pero lamentablemente en la práctica es muy difícil asociar estos factores estadísticos con factores de riesgo macroeconómicos subyacentes. Por otro lado, al partir de factores macroeconómicos predeterminados (inflación, producción industrial, etc.) normalmente se termina con factores muy correlacionados, violando el requerimiento que los factores deben ser ortogonales (no correlacionados) entre sí. Esto hace que su implementación en la práctica sea muy difícil; después de todo, ¿qué factores de riesgo se deben utilizar? Otro elemento que complica su validez (o prueba empírica) es el hecho que en la práctica un modelo multifactor no es necesariamente un modelo APT. Por ejemplo, el CAPM intertemporal resulta en que factores adicionales al mercado pueden corresponder a factores asociados al riesgo de cambios en el set de oportunidades de inversión. Es decir, un modelo multifactor no es inconsistente con el CAPM en su versión intertemporal.

[7] En estricto rigor este portafolio replica tiene sensibilidad unitaria al factor de riesgo k y cero sensibilidad a los otros factores de riesgo.

3.4.2. Evidencia Empírica del CAPM

Como discutimos en la sección predecente, una predicción fundamental del modelo CAPM es que el portafolio del mercado es ex-ante eficiente en media-varianza (está en la frontera eficiente), cuestión que no es posible testear empíricamente. En la práctica, el portafolio de riqueza de la economía (mercado) no es observable. Esto obliga a utilizar un portafolio de activos que aproxime al mercado (portfolio proxy), siendo común el uso de índices bursátiles (IPSA, IGPA, S&P500, MSCI, etc.). Por otro lado, los retornos esperados no son observables, lo que obliga a utilizar retornos históricos (realizados) para aproximar retornos esperados. Lamentablemente, un portafolio que es ex-ante eficiente puede terminar siendo ex-post un portafolio ineficiente. Visto de otra manera, la utilización de portafolios eficientes en media-varianza ex-post no nos permiten testear la validez del CAPM ya que nadie sabe si estos eran ex-ante eficientes. En resumen, cualquier testeo empírico del CAPM puede terminar siendo sólo una prueba de que el portafolio proxy de mercado es ex-post eficiente en media-varianza, siendo, a partir de esto, imposible inferir algo sobre la validez del CAPM.

A pesar de estas limitaciones, se han desplegado importantes esfuerzos para determinar si el β medido como la sensibilidad de los activos en relación a índices bursátiles explica los diferenciales de retornos promedios históricos de los activos. Según el CAPM de Black (menos restrictivo que el CAPM básico) el único factor que debería explicar el diferencial de retornos promedio es el β de los activos. A pesar que investigaciones iniciales encontraron soporte a esta predicción cualitativa, estos estudios consistentemente encontraron que la relación entre β y el promedio histórico de los retornos era más débil que lo que el CAPM sugería (la LMV empírica es más plana que la LMV teórica). Es decir, activos con bajo β entregaban un retorno promedio más alto que lo que el CAPM predecía; y activos con alto β entregaban un retorno promedio más bajo que lo que el CAPM predecía. Así, aún cuando la relación entre β y retorno promedio era positiva –consistente con la extensión de Black–, la relación era más débil de lo esperado bajo el CAPM básico[8]. Si tomamos esta evidencia como un rechazo al CAPM en su forma original, esto implica que el CAPM no debería ser utilizado en la estimación de tasas de descuento. La razón es que si los tests basados en portafolios *proxy* del mercado rechazan el CAPM, entonces la estimación de tasas de descuento utilizando estos mismos *proxies* del mercado también es inválida.

[8]Estudios porteriores han seguido encontrado estos problemas del CAPM.

Estudios más recientes han incluso puesto en tela de juicio la evidencia encontrada originalmente, en desmedro de la validez del CAPM. Se ha encontrado que otras variables (distintas al β) son capaces de explicar parte de los diferenciales de retorno promedio entre los activos. Por ejemplo, se ha encontrado que las acciones con una relación Libro/Bolsa[9] alta (Value Stocks) y las acciones de empresas pequeñas han entregado un retorno histórico promedio más alto que lo que el CAPM predice. Aún cuando esta evidencia puede deberse a minería de datos (un pecado en finanzas), se ha encontrado evidencia en varios paises consistente con estas anomalías. Un modelo empírico que ha capturado estás anomalías y que ha sido exitoso en describir los retornos promedio históricos fue presentado en los 90 por los autores K. French y E. Fama. El modelo está descrito por:

$$E(R_{it}) = r_{ft} + \beta_{iM}[E(R_{Mt}) - r_{ft}] + \beta_{is}E(SMB_t) + \beta_{ih}E(HML_t)$$

donde $E(SMB_t)$ corresponde al diferencial de retorno entre una cartera de empresas pequeñas y el retorno de una cartera de empresas grandes (*small minus big*), y $E(HML_t)$ corresponde al diferencial de retorno entre portafolios formados por empresas con alta y baja razón Libro/Bolsa (*high minus low*). Note que este modelo empírico utiliza como proxy del mercado índices bursátiles, al igual que las pruebas empírica clásicas.

Nuestro interés aquí es solamente mostrar este modelo porque su éxito empírico ha llevado a que algunos analistas y bancos de inversión lo comiencen a utilizar en sus estimaciones en reemplazo del CAPM en su forma original. Considerando el éxito empírico del modelo Fama-French, estudios académicos actuales están orientados a identificar qué cosa representan los factores SMB y HML. Algunos autores argumentan que estos dos factores adicionales corresponden efectivamente a factores de riesgo –consistente con I-CAPM o APT. Sin embargo, las investigaciones aún no son concluyentes en términos de qué factores de riesgo representan. Por ejemplo si este modelo es un APT, no queda claro qué factores de riesgo macroeconómico representan estos nuevos factores. Si este modelo representa un I-CAPM, es necesario probar que los dos factores adicionales representan riesgos asociados a movimientos inesperados en el set de oportunidades de inversión. Se ha argumentado también que empresas con alta relación Libro/Bolsa y empresas pequeñas podrían estar capturando factores de riesgos sistemáticos asociados al ciclo económico (estrés financiero, concentración del portafolio personal, etc.) que explicarían la predictibilidad

[9] Libro/Bolsa corresponde al valor libro dividido por el valor de mercado de las acciones

de largo plazo de los precios accionarios encontrada en estudios recientes, principalmente en los Estados Unidos.

Una explicación adicional que ha surgido es que estos factores adicionales representan sesgos irracionales de los inversionistas. Por ejemplo, si los inversionistas extrapolan el desempeño pasado de las empresa hacia el futuro, empresas en situación de insolvencia (alta razón Libro/Bolsa) son excluidas de las carteras de los inversionistas, siendo más castigadas de lo que deberían en el mercado. Cuando esta sobrereacción se corrige (potencialmente cuando las empresas se recuperan) terminamos con retornos promedio altos para este tipo de empresas. Alternativamente, sesgos conductuales pueden llevar a los inversionistas a invertir en activos más glamorosos –empresas grandes y con alto potencial de crecimiento (baja razón Libro/Bolsa). Estos sesgos dejarían fuera de los portafolios a empresas pequeñas y a aquellas con una alta razón Libro/Bolsa, lo que haría que el precio de estos activos se mantenga bajo, ofreciendo así mayores retornos realizados ex-post.

A pesar de los numerosos fallos empíricos del modelo CAPM en su formulación original, este modelo sigue siendo utilizado (correcta e incorrectamente) para la determinación de la rentabilidad exigida a la inversión. Probablemente esto se deba a que el modelo es fácil de entender e implementar. Además, dada su potente intuición y elegante simpleza, el CAPM es normalmente el punto de partida (y muchas veces final) para el tratamiento del riesgo en los cursos de finanzas de los programas de negocios de todo el mundo. Sin embargo, como ya se dijo, algunos autores abogan por la muerte del CAPM tanto en teoría como en su aplicación, proponiendo como alternativa un modelo teórico multifactor como el I-CAPM o el APT o el modelo empírico Fama-French. Sin embargo, no debemos olvidar la utilidad que el modelo estaría prestando a las empresas e individuos que lo utilizan para sus decisiones de inversión. Después de todo, no está claro que el beneficio marginal de utilizar en la práctica un modelo más complejo justifique las complicaciones extra que esto conllevaría. Un ejemplo local está en que la legislación de cada uno de los sectores de servicios básicos regulados (telecomunicaciones, sanitario y eléctrico) establece que la tasa de costo de capital aplicable en los procesos tarifarios debe ser calculada con el CAPM, en su forma original.