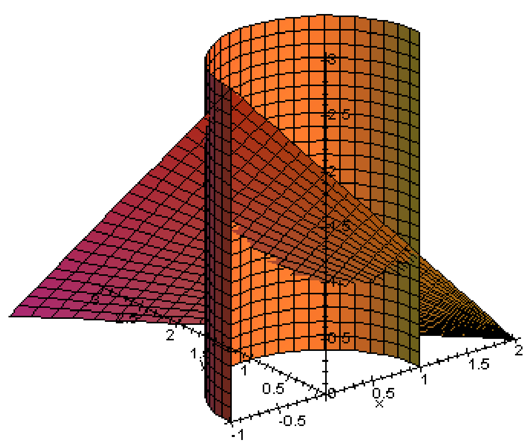
APUNTES DE CLASES

C A L C U L O   I I

Ingeniería Forestal e Ingeniería en Industrias de la Madera



Juan Pablo Prieto y Mauricio Vargas

Instituto de Matemática y Física

Introducción

Estos apuntes representan un esfuerzo por entregar a los alumnos los contenidos del curso sin necesidad de textos genéricos, de esos grandes volumenes de "Cálculo con Geometría Analítica". Todos esos libros, contienen mucho más que lo que estos apuntes pretenden. Sin duda pueden resultar ser buenos aliados de los estudiantes, pero no siempre representan el ritmo o intensidad de la asignatura.

Este no es un libro, como su nombre lo indica es un apunte de clases, que intenta presentar la materia en el orden, profundidad y ritmo que se ha establecido en los semestres que me ha tocado dictar esta asignatura, desde el año 1999. Cada semestre es una experiencia diferente, pero a pesar de esta diversidad, lo tratado intenta darle a los alumnos los elementos básicos de la integración en varias variables, los elementos iniciales del cálculo vectorial y apenas una pincelada de ecuaciones diferenciales de primer orden. Esperamos en versiones futuras entregar también algunos elementos de ecuaciones homogéneas de orden superior.

Si hay algo importante ausente en estos apuntes, esto es la falta de aplicaciones propias de las ciencias forestales. Este trabajo pendiente demandará de los autores una mayor conexión con los especialistas del área, de modo de complementar la teoría con las necesidades más concretas de la profesión.

Estimados alumnos, estos apuntes se ponen a su disposición para ser usados, rayados y compartidos. La clase será más fácil de seguir con estos apuntes a su lado. Dado que estos apuntes no pretenden ser definitivos, esperamos enriquecerlos con sus comentarios y críticas. En los Capítulos III, IV y V encontrarán ejercicios que han sido usados en diversas pruebas a los largo de los años. También, en el último capítulo hemos procurado incorporar pruebas resueltas, para permitirles aprender a partir de la lectura y reflexión de la soluciones.

Por último, la matemática es una ciencia que no se puede apropiar sin una práctica extensiva e intensiva. Si hay algo que he aprendido en todos estos años de enseñanza es que los alumnos deben tener la mente abierta, una actitud de claro riesgo, sin temor a errar (lo que se daría en llamar un **emprendedor**). En el desarrollo de los ejercicios se suelen cometer errores. Al comenzar a resolver un problema muchas veces no se sabe qué herramientas usar, no se sabe si se tendrá éxito; es este miedo a fallar, tal vez, la más grande barrera que se debe vencer.

Índice General

Capítulo 1

Integrales Dobles

1.1 Introducción

El concepto de integración extendido a funciones de 2 o más variables se denomina **Integración Múltiple** y se define esencialmente de la misma manera que la integral de Riemman para funciones de una variable. De todos modos, lo que expondremos aquí será un subconjunto muy específico de la teoría general de las integración múltiple. De hecho sólo consideraremos integrales dobles y lo básico de integración triple. No veremos, en estos apuntes, la teoría de integración para funciones de más de tres variables. Otra de las restricciones de nuestra selección es que las regiones del plano sobre las que definiremos la integración doble serán de un tipo muy particular. En fin, lo expuesto en estos apuntes es una selección particular de tópicos de integración múltiple. Pretendemos con esto darle los elementos más básicos y una experiencia suficiente para resolver problemas de integración múltiple.

Se supone que el lector sabe integrar en una variable y tiene conocimientos sobre los métodos de integración en una variable; como por ejemplo, sustitución, por partes, fracciones parciales y sustitución trigonométrica.

El primer desafío del lector será capacitarse en integracion en una variable. Al igual que en todo lo que han aprendido de matemáticas, el conocimiento y las competencias se construyen acumulativamente. Por lo que no es posible incursionar en integración múltiple sin cierta solidez en integración de una variable.

Los siguientes son algunos ejemplos de integrales de una variable que recomendamos resolver, con el objeto de retomar la capacidad de integración. Esto es absolutamente esencial para alcanzar los objetivos de este curso.

- Integración mediante el método de Sustitución:

$$\int xe^{x^2}\,dx \qquad \int 5\cos(7x)\,dx \qquad \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$$

- Integración mediante el método por Partes:

$$\int \frac{x^2}{e^{3x}}\,dx \qquad \int x\ln(4x)\,dx \qquad \int x\sin x\,dx$$

- Integración mediante el método Fracciones Parciales:

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx \qquad \int \frac{x-2}{x^2-4x+6}\,dx \qquad \int \frac{x+3}{(x+2)^3}\,dx$$

- Integración mediante el método Sustitución Trigonométrica:

$$\int \sin^3 x\,dx \qquad \int \sin^2\cos x\,dx \qquad \int \cos^3 x\sin^4 x\,dx$$

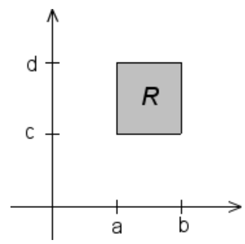
Este capítulo contiene los rudimentos para entender lo siguiente:

- Integrales parciales
- Integral doble sobre un rectángulo (definición)
- Relación entre la integral iterada y la integral doble sobre un rectángulo
- Regiones de integración
- Integral doble sobre una región general (definición)
- Relación entre la integral iterada y la integral doble sobre una región general

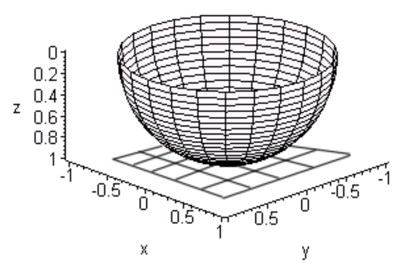
Asimismo, el capítulo contiene una serie de ejercicios resueltos (con mucha heterogeneidad en el nivel de desarrollo). Se recomienda a los estudiantes que usen el archivo con los ejercicios de pruebas anteriores como base para ejercitarse e incluyan las pruebas resueltas (todo esto se encuentra en el mismo sitio web del curso).

1.2 Integración sobre rectángulos

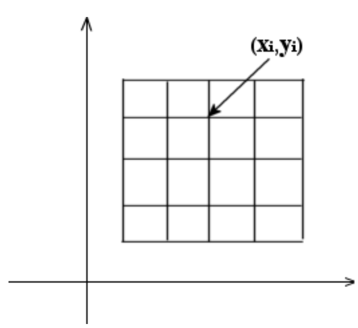
Sea $f(x, y)$ una función de dos variables definida sobre un rectángulo en el plano.



donde R es el dominio de la función f Sabemos que el gráfico $z = f(x, y)$ es una superficie en el espacio tridimensional. Por ejemplo:



Ahora dividamos el rectángulo R en pequeños rectángulos



De acuerdo a estas figuras respondamos la pregunta

1. ¿Cuál es el volumen de un paralelepípedo?

Respuesta: Con respecto a la columna de la base rectángular tenemos, el volumen es: el área de la base por la altura

A los rectángulos que forman R los llamaremos R_i. Sea (x_i, y_i)un punto en el interior de este rectángulo R_i.

El producto

$$f(x_i, y_i) \cdot Area\ de\ R_i,$$

corresponde al volumen de paralelepipedo de base R_i y altura $f(x_i, y_i)$.

Definición: Consideremos la suma

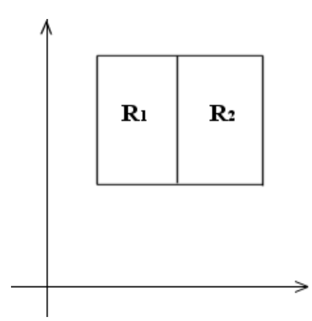
$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i, y_i) \cdot \text{Area de } R_i)$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i, y_i) \cdot \text{Area de } R_i)$ existe , entonces decimos que f es integrable, y este límite se llamará la integral doble de f sobre el rectángulo R, la cual se denota por:

$$\int\int_R f(x,y)dA$$

Algunas Propiedades

1. $\displaystyle\int\int_R [f(x,y) + g(x,y)]\,dA = \int\int_R f(x,y)\,dA + \int\int_R g(x,y)\,dA$
2. Si el rectángulo R se subdivide en dos rectángulos R_1 y R_2



Entonces $\displaystyle\int\int_R f(x,y)\,dA = \int\int_{R_1} f(x,y)\,dA + \int\int_{R_2} f(x,y)\,dA$

3. Si $f(x,y) \geq 0$, entonces

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \text{volumen bajo la superficie}$$
$$z = f(x,y) \text{ y sobre el rectángulo } R$$

1.3 Integrales Iteradas

Integrales Parciales

Podemos definir la integral de una función de dos variables del siguiente modo:

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

para este caso se considera y como constante y se integra con respecto a x.

Ejemplo:

$$\int_1^2 2xy\,dx = y\int_1^2 2x\,dx = y(x^2)\Big|_1^2 = 3y$$

$\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ es siempre una función de y

Del mismo modo se define:

$$\int_c^d f(x,y)\,dy$$

manteniendo x como constante e integrando con respecto a y.

Ejemplo:

$$\int_0^3 2xy\,dy = x\int_0^3 2y\,dy = x(y^2)\Big|_0^3 = 9x$$

Veamos algunos ejemplos:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\,dy = \int_{-1}^{1} x^2\,dy + \int_{-1}^{1} y^2\,dy = x^2\,(y)\Big|_{-1}^{1} + \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = x^2+x^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 2x^2+\frac{2}{3}$

2. $\displaystyle\int_{0}^{1}(e^y+1)\,dx = \int_{0}^{1} e^y\,dx + \int_{0}^{1}\,dx = (x)\Big|_{0}^{1} e^y + x\Big|_{0}^{1} = (e^y-0)+(1-0) = e^y+1$

3. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos y\,dy = x\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy = x(-\sin y)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -x\left(\cdot\sin\frac{\pi}{2} - (-\sin 0)\right) = -x$

4. $\displaystyle\int_{1}^{2} x\cos y\,dx = \cos y\int_{1}^{2} x\,dx = \cos y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} = \cos y\left(\frac{4-1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cos y$

5. $\displaystyle\int_{0}^{2}(y-9xy^2)\,dy = \int_{0}^{2} y\,dy - \int_{0}^{2} 9y^2x\,dy = \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2} - 9x\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} = 2-24x$

Ahora podemos definir

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

dado que $\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ es una función de x, podemos calcular la integral de esta función con respecto a x, del mismo modo podemos definir

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

integrando primero $f(x,y)$ con respecto a x, y el resultado (que es una función de y) lo integramos con respecto a y.

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\int_0^1 2xy\,dx\right) dy &= \int_1^2 \left(2y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right) dy \\
&= \int_1^2 2y\frac{1}{2}\,dy \\
&= \int_1^2 y\,dy \\
&= \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \\
\int_1^2 \left(\int_0^1 2xy\,dx\right) dy &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \left(\int_0^3 (x^2+y^2)dx\right) dy &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 + y^2x\Big|_0^3\right) dy \\
&= \int_{-1}^1 9 + 3y^2\,dy \\
&= 9y\Big|_{-1}^1 + \frac{3y^3}{3}\Big|_{-1}^1 \\
&= (9+9) + (1+1) \\
\int_{-1}^1 \left(\int_0^3 (x^2+y^2)dx\right) dy &= 20
\end{aligned}$$

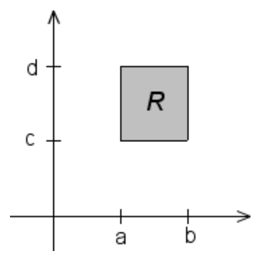
3.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\int_0^1 (4-x-y)dx\right) dy &= \int_1^2 \left(4x - \frac{x^2}{2} - xy\right)\Big|_0^1 dy \\
&= \int_1^2 \left(\frac{7}{2} - y\right) dy \\
&= \left(\frac{7y}{2} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 \\
&= \left(\frac{14}{2} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
\int_1^2 \left(\int_0^1 (4-x-y)dx\right) dy &= 2
\end{aligned}$$

Teorema

Sea $f(x,y)$ una función integrable sobre el rectangulo R de la figura. Entonces:

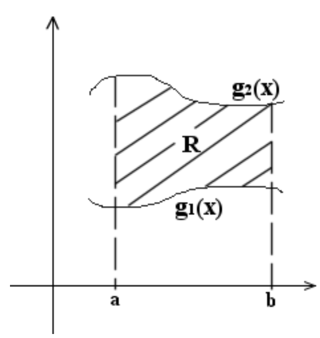
$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$



1.4 Regiones de Integración

Limitaremos las integrales dobles sólo a las regiones descritas aquí:

Regiones de tipo I: una región de tipo I es de la siguiente forma; es decir, se puede escribir mediante las siguientes desigualdades.



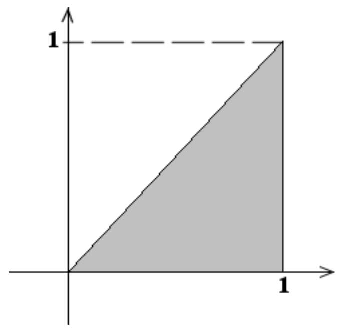
$$R = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{c} a \le x \le\ b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{array} \right\}$$

En otras palabras es una región acotada por arriba por el gráfico de la función $g_2(x)$ y por abajo por el grafico de la función $g_1(x)$; a la izquierda por la recta $x = a$ y a la derecha por la recta $x = b$.

Usualmente decimos que $g_2(x)$ es el techo de la región y que $g_1(x)$ es el piso.

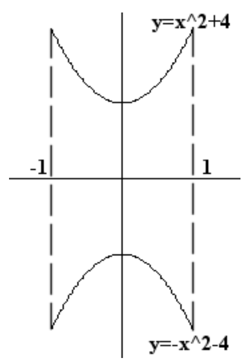
Ejemplos: Para cada región ilustrada, determine si es una región de tipo I y establezca el techo, el piso y los lados (expréselo como desigualdades).

a)



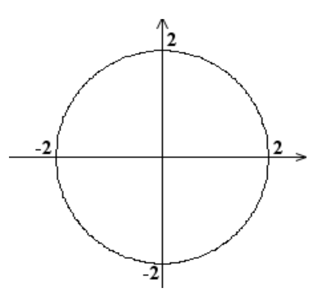
Sí, es de tipo I, $0 \leq x \leq 1\,,\; 0 \leq y \leq x$

b)



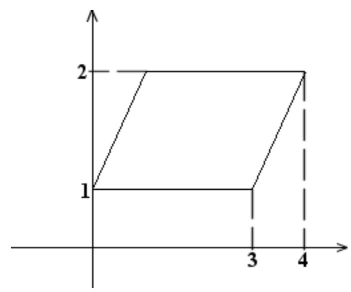
Sí, es de tipo I ya que: $-1 \leq x \leq 1\,,\; -x^2 - 4 \leq y \leq x^2 + 4$

c)



Sí, es de tipo I ya que: $-2 \leq x \leq 2\,,\ -\sqrt{-x^2-4} \leq y \leq \sqrt{-x^2+4}$

d)

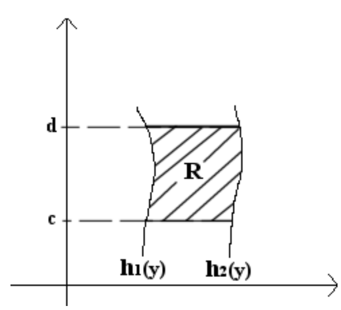


No

Regiones de tipo II

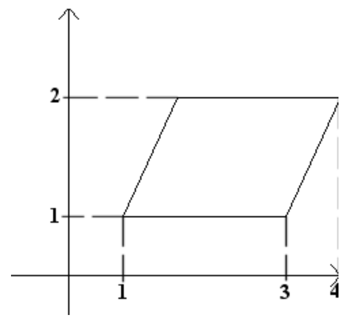
Una región del plano se denomina región de tipo II, si tiene la siguiente forma:

$$R = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{c} h_1(y) \leq x \leq \ h_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}$$

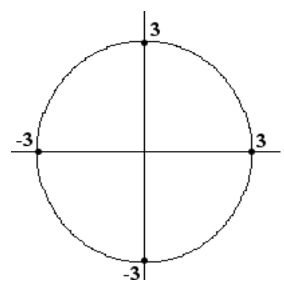


Ejemplos

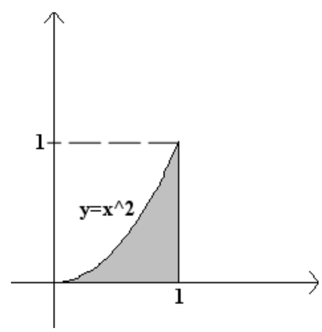
1. Figura 1



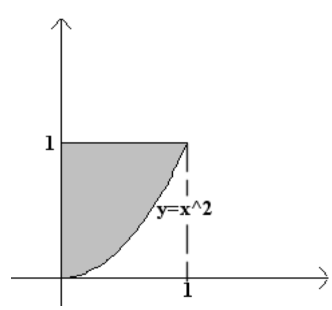
2. Figura 2



3. Figura 3



4. Figura 4



Solución de los ejemplos

1. $1 \leq y \leq 2$; x varia entre las 2 diagonales que llamamos $h_1(y)$ y $h_2(y)$. Podemos calcular estas funciones: $(1,1); (2,2); (3,1); (4,2)$.

   Pendiemtes
   $$m_1 = \frac{2-1}{2-1} = 1 \qquad m_2 = \frac{2-1}{4-3} = 1$$

   Entonces
   $$y - 1 = (x-1) \Rightarrow y - 1 = x - 1 \qquad\qquad y - 1 = (x-3) \Rightarrow y - 1 = x - 3$$

   despejando x: tenemos
   $$x = y$$
   $$x = y + 2$$

   por lo tanto
   $$R = \left\{ (x,y) \middle/ \begin{array}{c} y \leq x \leq \ y+2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{array} \right\}$$

2. $x^2 + y^2 = 9 \qquad\qquad 3 \leq y \leq 3$

   despejando x: tenemos
   $$x^2 = 9 - y^2$$
   $$x = \pm\sqrt{9 - y^2}$$

   por lo tanto
   $$R = \left\{ (x,y) \middle/ \begin{array}{c} -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2} \\ -3 \leq y \leq 3 \end{array} \right\}$$

3. $\quad 0 \leq y \leq 1$

   donde $y = x^2$: entonces
   $$\sqrt{y} = x \text{ piso}$$
   $$x = 1 \text{ techo}$$

   Por lo cual la región es:
   $$R = \left\{ (x,y) \middle/ \begin{array}{c} \sqrt{y} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}$$

   sin embargo esta región es de tipo I ya que:

$$R = \left\{ (x,y) \middle/ \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{array} \right\}$$

4. Describir la región como tipo I y tipo II

   Tipo I:

$$y = x^2$$

$$\sqrt{y} = x$$

$$R = \left\{ (x,y) \middle/ \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1 \end{array} \right\}$$

   Tipo II:

$$x = \sqrt{y} \text{ piso}$$

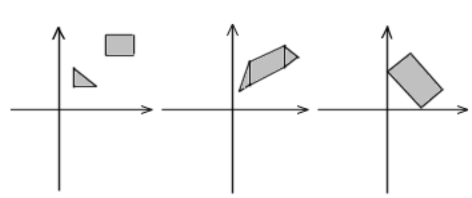
$$x = 1 \text{ techo}$$

$$R = \left\{ (x,y) \middle/ \begin{array}{l} 0 \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{array} \right\}$$

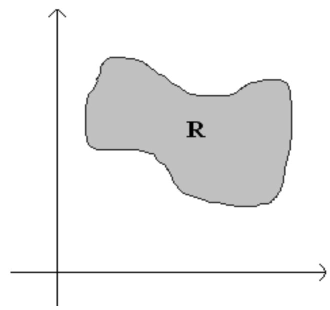
Regiones de tipo III

Finalmente una región es de tipo III cuando puede descomponerse en un numero finito de regiones de tipo I y tipo II.

Ejemplo:



1.5 Integrales dobles sobre regiones de tipo I, II y III



Definición

1. Sea R una región de tipo I, entonces:

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx$$

donde :

$$R = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{array} \right\}$$

2. Sea R una región de tipo II, entonces:

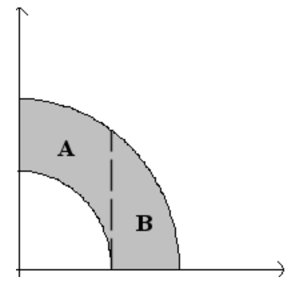
$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dxdy$$

donde :

$$R = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{c} h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}$$

3. Si R es una región de tipo III, entonces la integral doble es la suma de las integrales dobles sobre las subregiones.

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int\int_A f(x,y)\,dA + \int\int_B f(x,y)\,dA$$



Observación: Si $f(x,y) \geq 0$ sobre la región R; entonces

$$\int\int_R f(x,y)\, dA = \text{volumen del solido bajo la superficie } z = f(x,y) \text{ y sobre la región } R$$

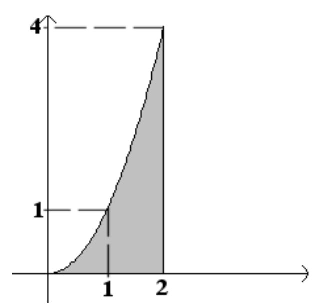
Ejemplos:

1. (a) ¿Cuál es la región de integración implícita en esta integral iterada?.

$$\int_1^2 \int_0^{x^2} (x+y)\ dydx$$

Solución: La región es de tipo I:

$$1 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq y \leq x^2$$



(b) Calculemos la integral

$$\int_1^2 \int_0^{x^2} (x+y)\ dydx$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^{x^2} (x+y)\; dydx &= \int_1^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{x^2} dx \\
&= \int_1^2 \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx \\
&= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_1^2 \\
&= \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{32}{10} - \frac{1}{10} \right) \\
&= (4 - 0,25) + (3,2 - 0,1) \\
&= (7,2) + (0,35) \\
\int_1^2 \int_0^{x^2} (x+y)\; dydx &= 4,2
\end{aligned}$$

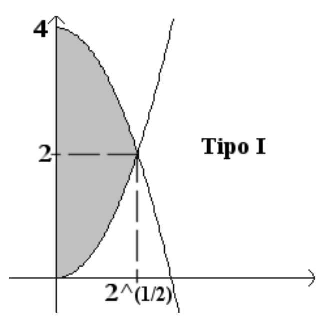
2. Dada la siguiente integral:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4-x^2} x - y^2 \; dydx$$

   (a) Describa la región de integración y dibujela
   La región esta definida por:

$$\left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{l} 0 \le x \le \sqrt{2} \\ x^2 \le y \le 4 - x^2 \end{array} \right\}$$

   y su gráfica es:



   (b) Calcule la integral

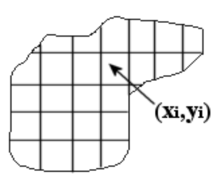
$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4-x^2} x - y^2 dydx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{2}}\int_{x^2}^{4-x^2} x-y^2 dydx &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(xy-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{4-x^2} dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left[x(4-x^2)-\frac{(4-x^2)^3}{3}\right]-\left[x(x^2)-\frac{(x^2)^3}{3}\right]\right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(4x-2x^3-\frac{64}{3}+16x^2-4x^4+\frac{2}{3}x^6\right) dx \\
&= \left(2x^2-\frac{x^4}{2}-\frac{64}{3}x+\frac{16}{3}x^3-\frac{4}{5}x^5+\frac{2}{21}x^7\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} \\
\int_0^{\sqrt{2}}\int_{x^2}^{4-x^2} x-y^2 dydx &= -16,533
\end{aligned}$$

1.6 Diferencia entre la integral doble y la integral iterada

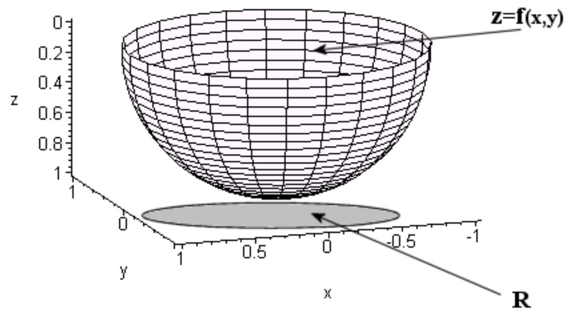
Sea R una región de integración en el plano , la integral doble de una función $f(x,y)$ sobre la región R; se define como:

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x,y)\,\Delta x_i\,\Delta y_i$$



Sabemos que si $f(x,y)\geq 0$ entonces:

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \text{volumen bajo la superficie } z=f(x,y) \text{ y sobre la región } R$$



En la práctica las integrales dobles se calculan mediantes integrales iteradas. Esto depende del tipo de región.

- Si R es del tipo I

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx$$

- Si R es del tipo II:

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dxdy$$

Algunos ejemplos de profundización

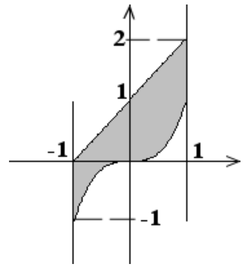
Describir la región de integración y calcular la integral iterada en los siguientes casos

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{x^3}^{x+1}(3x+2y)\,dydx$

   La región de integración es de tipo I

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$x^3 \leq y \leq x+1$$



Ahora calculamos la integral iterada

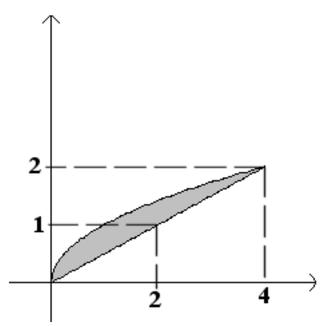
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{x^3}^{x+1}(3x+2y)\,dydx &= \int_{-1}^{1}\left(3xy+\frac{2y^2}{2}\right)\Big|_{x^3}^{x+1}dx \\
&= \int_{-1}^{1}(-x^6-3x^4+4x^2+5x+1)\,dx \\
&= \left(-\frac{x^7}{7}-\frac{3x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2}{7}-\frac{6}{5}+\frac{8}{3}+2 \\
\int_{-1}^{1}\int_{x^3}^{x+1}(3x+2y)\,dydx &= \frac{334}{105}
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^{2y}(4x-y)\,dxdy$

La región de integración es de tipo II

$$0 \leq y \leq 2$$

$$y^2 \leq x \leq 2y$$



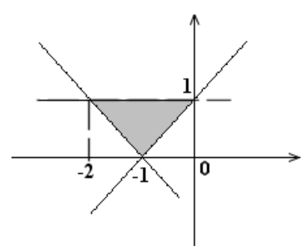
Ahora calculamos la integral iterada

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x-y)\,dxdy &= \int_0^2 \left(\frac{4x^2}{2} - xy\right)\Big|_{y^2}^{2y} dy \\
&= \int_0^2 (-2y^4 + y^3 + 6y^2)\,dy \\
&= \left(-\frac{2y^5}{5} + \frac{y^4}{4} + \frac{6y^3}{3}\right)\Big|_0^2 \\
&= -\frac{64}{5} + \frac{16}{4} + \frac{48}{3} \\
\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x-y)\,dxdy &= \frac{36}{5}
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-y-1}^{y-1} (x^2+y^2)\,dxdy$

La región de integración es de tipo II

$$0 \leq y \leq 1$$
$$-y-1 \leq x \leq y-1$$



Ahora calculamos la integral iterada

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-y-1}^{y-1} (x^2+y^2)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\Big|_{-y-1}^{y-1} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{8}{3}y^3 + 2y\right)\,dy \\
&= \left(\frac{2}{3}y^4 + y^2\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{3} + 1 \\
\int_0^1 \int_{-y-1}^{y-1} (x^2+y^2)\,dxdy &= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Dadas las siguientes integrales:

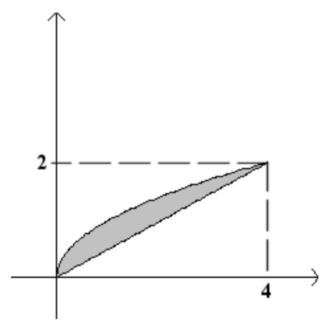
$$\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} 4x - y \; dxdy \qquad \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} y \cos x^5 \; dxdy \qquad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2} \; dydx$$

1. Describa la región de integración y dibuje cada una de ellas:

   caso 1. La región esta definida por:

$$\left\{ (x,y) \middle/ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq 2y \end{array} \right\}$$

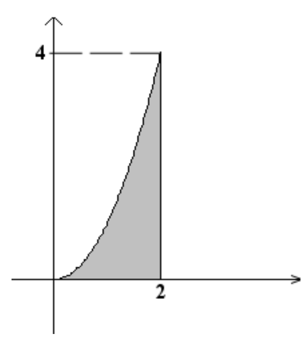
   y su gráfica es:



   caso 2. La región esta definida por:

$$\left\{ (x,y) \middle/ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 4 \\ \sqrt{y} \leq x \leq 2 \end{array} \right\}$$

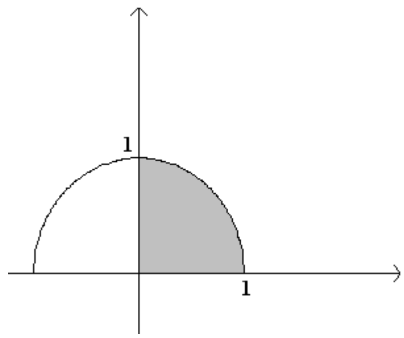
   y su gráfica es:



   caso 3. La región esta definida por:

$$\left\{(x,y)\Big/ \begin{array}{l} 0\leq x\leq\ 1 \\ 0\leq y\leq\sqrt{1-x^2} \end{array}\right\}$$

y su gráfica es:



2. Cambie el orden de integración

$$\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 4x-y\ dydx \qquad \int_0^2\int_0^{x^2} y\cos x^5\ dydx \qquad \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\ dxdy$$

3. Calcule las integrales

caso 1. $\displaystyle\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 4x-y\ dydx$

$$\begin{aligned}
\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 4x-y\ dydx &= \int_0^4\left(4xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}dx \\
&= \int_0^4\left[\left(4x\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)-\left(2x^2-\frac{x^2}{8}\right)\right]dx \\
&= \int_0^4\left(4x^{3/2}-\frac{x}{2}-2x^2+\frac{x^2}{8}\right)dx \\
&= \left(\frac{8x^{5/2}}{5}-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^3}{8}\right)\Big|_0^4 \\
\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 4x-y\ dydx &= \frac{36}{5}
\end{aligned}$$

caso 2. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{x^2} y\cos x^5\ dydx$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^{x^2} y\cos x^5 \ dydx &= \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2}\cos x^5\right)\Bigg|_0^{x^2} dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^4}{2}\cos x^5\right) dx \\
\int_0^2 \int_0^{x^2} y\cos x^5 \ dydx &= 0,012917584
\end{aligned}$$

caso 3. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} \ dxdy$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} \ dxdy &= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-y^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= \int_0^1 \left(\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-y^2}\right) dy \\
&= \int_0^1 (1-y^2)dy \\
&= \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\
\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} \ dxdy &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Integrales Dobles en Coordenadas Polares

2.1 Coordenadas Polares

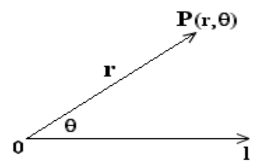
El plano cartesiano es un plano geométrico con un par de ejes perpendiculares que permite describir cualquier punto geometrico por un par ordenado único y viceversa.

Las coordenadas polares corresponden a una manera alternativa de describir puntos geométricos del plano. En lugar de usar un par de ejes perpendiculares se selecciona un punto O (pivote) que llamamos *polo* y un rayo L que parte desde O y que llamamos *eje polar*.

El plano provisto de este polo y este eje polar se llama *plano polar*.

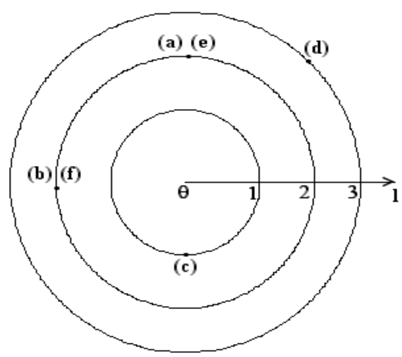
¿Cómo se describen los puntos en este plano? Coloquialmente podemos describir esta representación polar imaginando una antena exensible que se pivotea en el polo y cuya punta es capaz de alcanzar cualquier punto del plano. Entonces, el punto en cuestión se puede describir usando la longitud de la antena y el ángulo que esta antena forma con el eje polar (en el sentido contrario a las agujas del reloj). Más formalmente, sea P un punto en el plano, sea r la distancia entre P y el polo O. Sea θ el ángulo que forma el rayo $\overline{OP}$ y L. Entonces al punto P le asociamos el par ordenado (r, θ).

r y θ se denominan las coordenadas polares del punto P



Dibujemos algunos puntos en coordenadas polares. Para lograr esto necesitamos de un *cuaderno polar*, es decir un cuaderno que tenga un *cuadriculado* polar, el cual nos permitirá ubicar en el plano los puntos conociendo la longitud de la antena y el ángulo que forma con el eje polar. En los ejemplos que siguen se han dibujado los puntos indicados usando círculos (que nos permiten conocer la distancia al polo):

(a)	$(2, \pi/2)$	(b)	$(2, \pi)$	(c)	$(1, 3\pi/2)$
(d)	$(3, \pi/4)$	(e)	$(2, \pi/2 + 2\pi)$	(f)	$(2, \pi + 2\pi)$

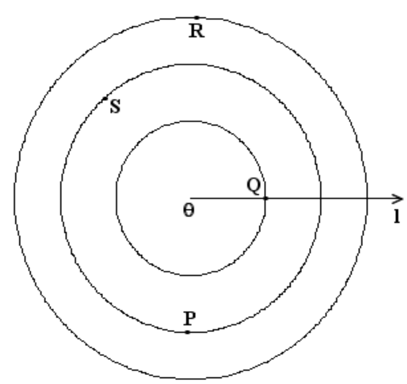


En los ejemplos anteriores se da una situación nueva, a saber, un punto del plano puede tener más de una reprsentación como par ordenado (polar). Por ejemplo en los casos (a) y (e), o bien (b) y (f). Más generalmente, *todo* punto del plano tiene *infinitas* representaciones polares, esto es, para cada punto del plano hay infinitos pares ordenados que corresponden a este punto. Para verificar esto baste el siguiente ejemplo: el punto correspondiente al par $(2, \pi/2)$ es el mismo que el punto correspondiente a los pares ordenados $(2, \pi/2+2\pi)$, $(2, \pi/2+4\pi)$, $(2, \pi/2 + 6\pi)$, $(2, \pi/2 - 2\pi)$, etc.

Entonces, a cada punto del plano le podemos asociar un par ordenado. Pero aun queda por dilucidar si lo contrario es cierto, a saber, dado un par ordenado (r, θ) cualquiera, ¿es posible asociarle un punto en el plano? Consideremos la propuesta siguiente como un desafío: ubicar en el plano polar los pares ordenados dados.

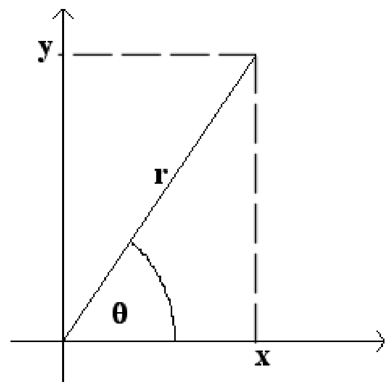
- $P(2, -\pi/2)$
- $Q(-1, \pi)$
- $R(-3, -\pi/2)$
- $S(-2, -\pi/4)$

Para poder ubicar estos puntos en el plano necesitamos interpretar las coordenadas negativas. El par ordenado $(-r, \theta)$ corresponde al mismo punto que el par ordenado $(r, \theta + \pi)$. Por otro lado, el par $(r, -\theta)$ se asocia al punto P considerando la medida del ángulo que la *antena* forma con el eje polar en la dirección de las agujas del reloj. La figura que sigue muestra la ubicación de estos puntos en el plano polar (usamos los círculos sólo como referencia).



2.2 Relación entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas

Consideremos el plano cartesiano con el par de ejes perpendiculares. Sobre este plano superponemos un plano polar, haciendo coincidir el polo con el origen del plano cartesiano y el rayo polar con el lado positivo del eje x. La figura que sigue muestra gráficamente la relación entre las variables (coordenadas) x, y y las variables r, θ.



A partir de nuestro conocimiento previo de trigonometría, se tiene:

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{y}{r}$$

$$\Rightarrow \quad x = r\ \cos\theta \qquad y = r\ \sin\theta$$

Las identidades previas nos permiten, conociendo los pares ordenados polares, encontrar los pares ordenados correspondientes en coordenadas cartesianas. Por ejemplo:

1. $(1, \pi/2) \to (0, 1)$
2. $(2, \pi/4) \to (1.41, 1.41)$
3. $(-3, \pi/6) \to (-2.6, 1.5)$
4. $(-2, \pi) \to (2, 0)$

Nos falta establecer lo recíproco, a saber, dado un par ordenado en coordenadas cartesianas, encontrar el par polar correspondiente. Observemos que usando el Teorema de Pitágoras (o directamente de las relaciones establecidas previamente), se obtiene una primera relación:

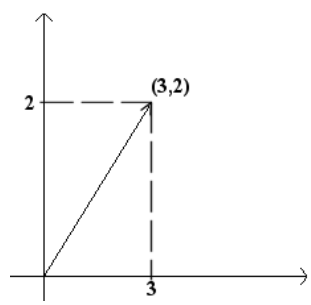
$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta \\ &= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \end{aligned}$$

Igualmente, de las misma relaciones previas se tiene:

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

Ejemplo

La siguiente figura muestra un punto con sus coordenadas cartesianas y nos interesa encontrar las coordenadas polares:



$$r^2 = 3^2 + 2^2 \quad \Rightarrow \; r^2 = 15 \quad \Rightarrow \; r = \sqrt{15}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \; \theta = \arctan\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \; \theta \approx 0,58 \approx 33,7^\circ$$

En resumen se tienen las relaciones siguientes para transformar un par ordenaddo de un sistema de coordenadas al otro:

$$\text{De polares a cartesianas} \left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\}$$

$$\text{De cartesianas a polares} \left\{ \begin{array}{c} \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right\}$$

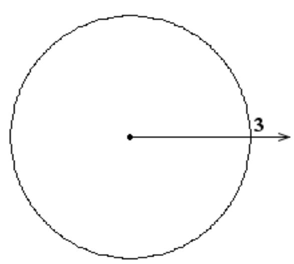
En este último caso, para encontrar el ángulo, es importante saber que la igualdad $\arctan \tan\theta = \theta$ es válida sólo para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Esto se refleja en que la igualdad $\theta = \arctan \dfrac{y}{x}$ es válida sólo para los pares ordenados (x, y) que están en el primer y el cuarto cuadrante (pues ahí el ángulo que forman los pares ordenados está en el rango adecuado). En los otros dos cuadrantes será necesario sumarle π a $\arctan \dfrac{y}{x}$. En resumen:

$$\theta = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{si } (x, y) \text{ está en el cuadrante I o IV} \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{si } (x, y) \text{ está en el cuadrante II o III} \end{cases}$$

2.3 Ecuaciones Polares

1. El gráfico de la ecuación $r = 3$ es el conjunto de pares ordenados $\{(r, \theta)/r = 3\}$ o sea, el conjunto $\{(3, \theta)\}$ donde θ es cualquier ángulo

   Gráficamente esto corresponde a los puntos del plano que están a distancia 3 del polo.

   Otra manera de saber la forma que tiene el gráfico de la ecuación polar $r = 3$ es transformar esta ecuación a su equivalente en coordenadas cartesianas.

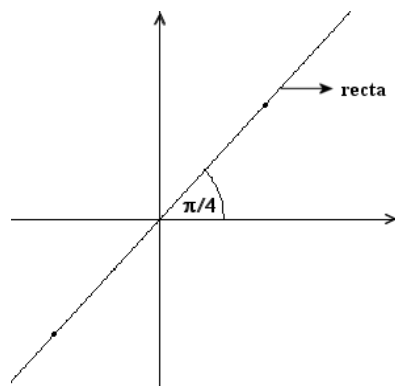
$$\begin{aligned} r &= 3 \text{ elevando al cuadrado ambos lados} \\ r^2 &= 9 \text{ usando la relación entre las coordenadas} \\ x^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$

Esta última es la ecuación cartesiana del círculo de radio 3 centrado en el origen.

En general $r = a$ corresponde a un círculo de radio a, centrado en el origen.

2. La gráfica de la ecuación $\theta = \pi/4$ es el conjunto $\{(r, \theta)/\theta = \pi/4\}$

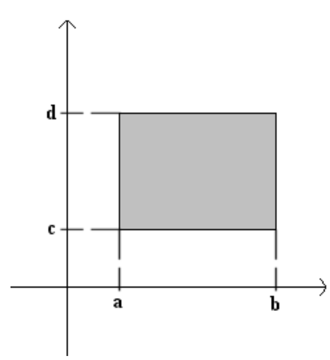
   Gráficamente es la recta que pasa por el origen ilustrada en la figura siguiente (los puntos $(3, \pi/4)$,$(-3, \pi/4)$ aparecen marcados como referencia):



   Más generalmente, la ecuación $\theta = \beta$ tiene como gráfico a la recta que pasa por el origen y forma un ángulo β con respecto al eje polar (lado positivo del eje x).

Usando los ejemplos anteriores (gráficas de las ecuaciones $r = a$ y $\theta = \beta$) podemos construir regiones del plano a partir de desigualdades. Recordemos que un rectángulo corresponde a un conjunto de la forma:

$$\left\{ (x, y) \Big/ \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}$$

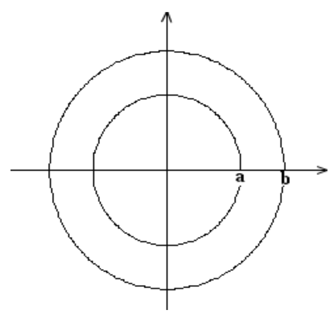


En forma similar el conjunto:

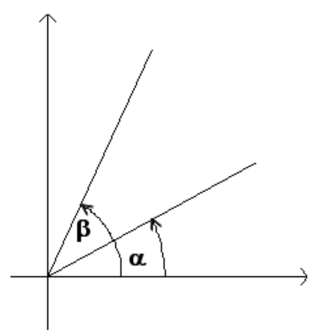
$$\left\{(r,\theta)\Big/\ \begin{array}{c} a \le r \le \ b \\ \alpha \le \theta \le \beta \end{array}\right\}$$

lo llamamos un **rectángulo polar**

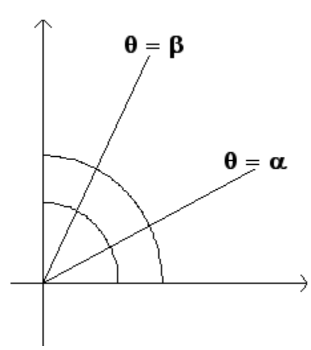
Las desigualdades $a \le r \le \ b$ se representan gráficamente como el anillo de la figura:



Por otro lado, las desigualdades $\alpha \le \theta \le \beta$ corresponden a:



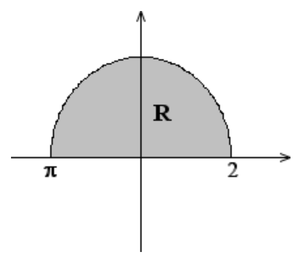
Asi entonces el rectángulo polar es:



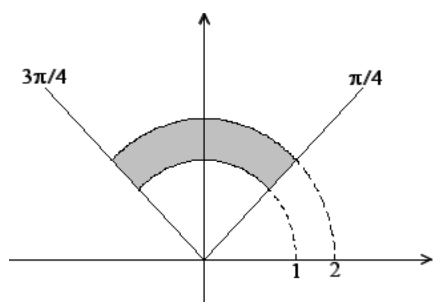
Ejercicios

En los siguientes ejemplos graficamos algunos rectángulos polares.

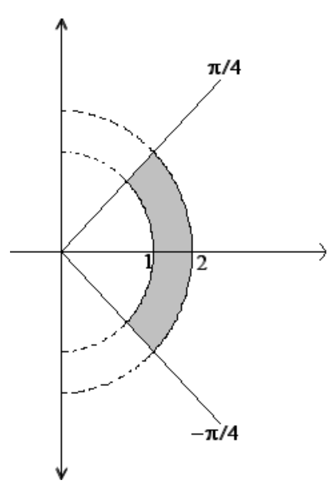
1. $R = \left\{ (r,\theta) \Big/ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\}$



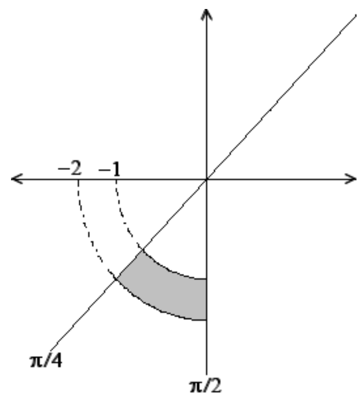
2. $S = \left\{ (r,\theta) \Big/ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4 \end{array} \right\}$



3. $T = \left\{ (r,\theta) \Big/ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4 \end{array} \right\}$



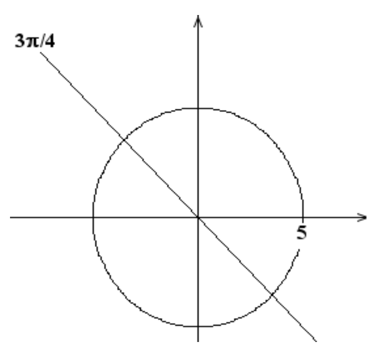
4. $U = \left\{ (r,\theta) \Big/ \begin{array}{c} -2 \leq r \leq \ -1 \\ \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2 \end{array} \right\}$



2.4 Gráficos Polares

El gráfico de una **ecuación polar** es el conjunto de pares ordenados (r,θ) que satisfacen dicha ecuación.

Por ejemplo, las gráficas de las ecuaciones $r = 5$ y $\theta = 3\pi/4$ se ilustra en la figura.



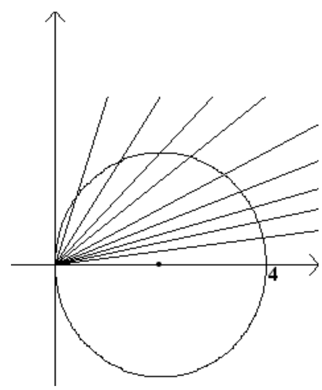
En general queremos graficar $r = f(\theta)$

Ejemplos:

1. $r = 4\cos\theta$; graficar , para esto hacemos una tabla de valores que nos permitirá trazar el gráfico.

r	4	3.9	3.7	3.4	3	2.5	2	1.3	0.6	0	-0.6	-1.3	-2
θ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120

Si continuamos graficando estos pares ordenados hasta el punto de reconocer el gráfico, podríamos darnos cuenta que corresponde a un círculo de radio 2 centrado en el $(2, 0)$.



Otra mirada al mismo problema. Consideremos la ecuación $r = 4\cos\theta$. Queremos transformar esta ecuación a coordenadas rectangulares:

$$r = 4\cos\theta \quad / \cdot r \Rightarrow r^2 = 4r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 4x$$

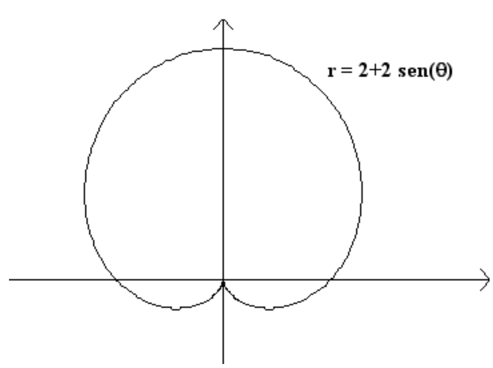
$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad / + 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 4$$

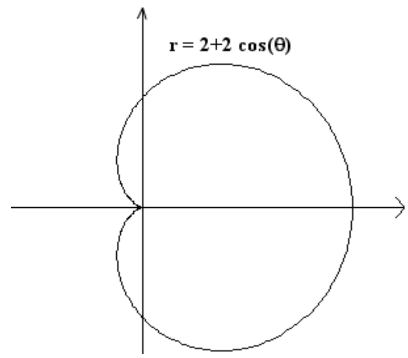
De modo que la ecuación corresponde al círculo de radio 2 centrado en el punto $(2, 0)$.

2. Las ecuaciones

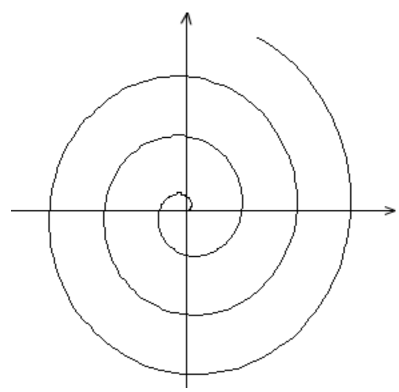
$$r = a \pm a\sin\theta$$
$$r = a \pm a\cos\theta$$

tiene el siguiente gráfico:





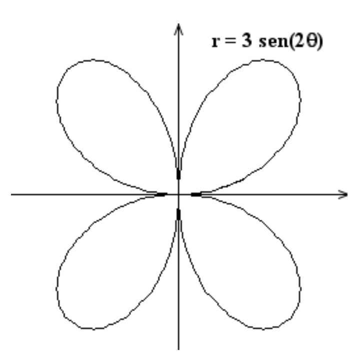
3. La ecuación $r = \theta$; tiene como gráfico *el espiral de Arquimedes*

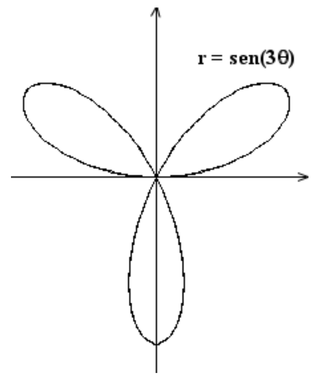


4. La llamada *rosa* tiene las siguientes ecuaciones:

$$r = a\sin(n\theta)$$
$$r = a\cos(n\theta)$$

el número de pétalos de estas ecuaciones está dado por: $\left\{ \begin{array}{l} 2n \text{ pétalos si } n \text{ es par} \\ n \text{ pétalos si } n \text{ es impar} \end{array} \right\}$



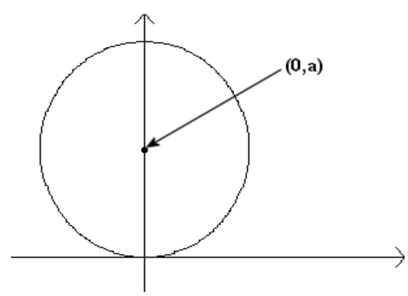


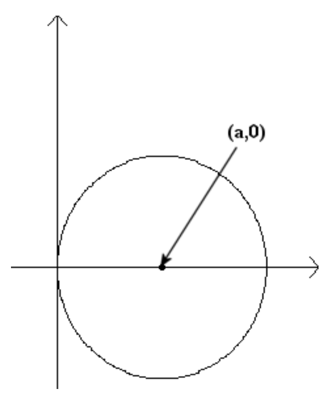
5. Sabemos que la ecuación $r = a$ es un círculo de radio a centrado en el origen. Por otro lado, al igual que en el ejemplo 1, las ecuaciones

$$r = 2a \sin\theta$$

$$r = 2a \cos\theta$$

tienen como gráfico un circulo de radio a centrado en $(0, a)$ y en $(a, 0)$ respectivamente.



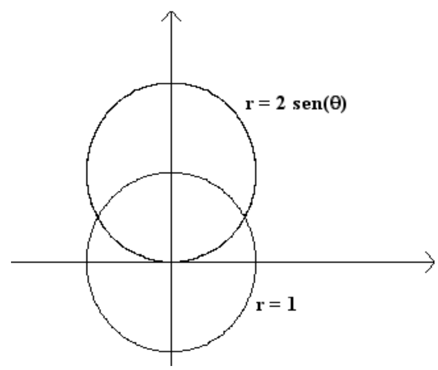


Ejemplos:

1. Los siguientes círculos:

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ r &= 2\sin\theta \end{aligned}$$

tienen como gráfico:



¿Dónde se intersectan estos círculos?

$$r = 1$$

$$r = 2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad 1 = 2\sin\theta$$

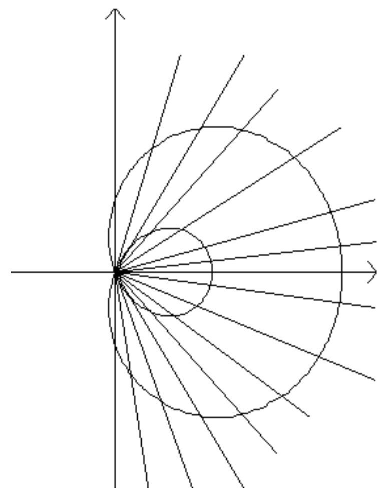
$$\Rightarrow \sin\theta = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \theta = \left\{ \begin{array}{c} 30^\circ \\ 150^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \left\{ \begin{array}{c} \pi/6 \\ 5\pi/6 \end{array} \right\}$$

2. Para dibujar el caracol

$$r = 2 + 5\cos\theta$$

contruimos la tabla

r	7	6.6	4.7	2.97	2	0.086	-1.5	-2.6	-3	-2.90	-2.15
θ	0	22.5	56.26	78.75	90	112.5	135	157.5	180	191.25	213.75

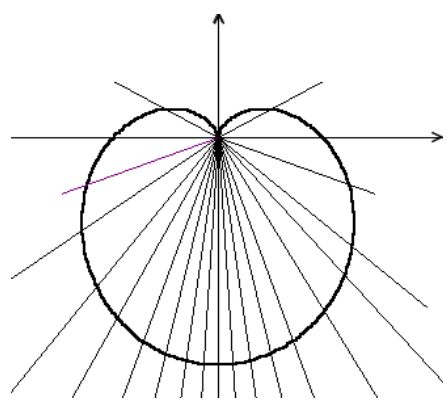


3. Para dibujar el cardioide

$$r = 2 - 2\sin\theta$$

construimos la tabla

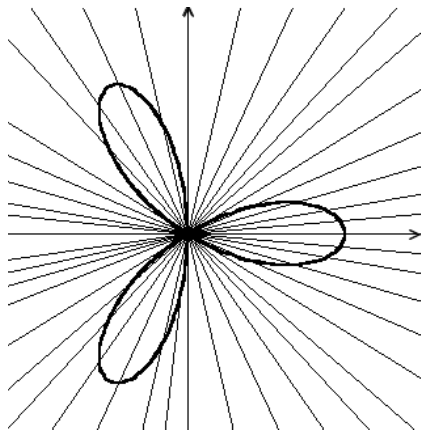
r	2	1.6	0.58	0.15	0.03	0	0.03	2	2.76	3.11	3.66	3.84	4
θ	0	11.25	45	67.5	78.75	90	101.25	180	202.5	213.75	236.25	247.5	270



4. Del mismo modo para dibujar el gráfico de

$$r = 2\cos(3\theta)$$

r	2	1.66	0.76	-0.39	-1.4	-1.96	-1.84	-1.1	0	-1.1	-2	-1.66
θ	0	11.25	22.5	33.75	45	56.25	67.5	78.75	90	101.25	180	191.25

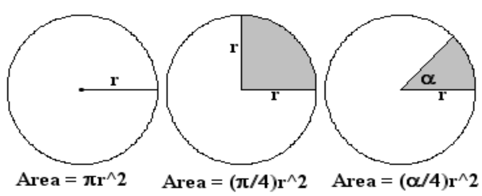


2.5 Integrales dobles en coordenadas polares

Justificación del formulismo

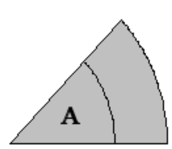
¿Cuál es la fórmula adecuada para la integral doble $\displaystyle\int\int_R f(x,y)\,dA$ en coordenadas polares? No basta con cambiar x por $r\cos\theta$ e y por $r\sin\theta$. La clave del formulismo está en la *diferencial de área* dA.

Para tener una aproximación heurística a la pregunta formulada, comenzamos con un problema clásico de geometría. ¿Cuál es el área del rectángulo polar? Las figuras ilustran algunos casos.



El área del sector circular de radio r y ángulo central α (en radianes) es $\frac{\alpha}{2}r^2$

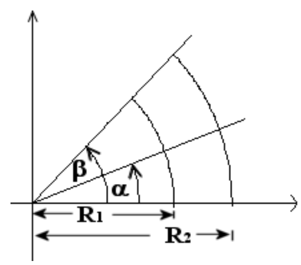
Entonces para el rectángulo polar



se tiene:

$$\text{Area=área total} - \text{área del trozo A}$$

Usando coordenadas polares, la figura sería:



Y entonces la fórmula previa del área se puede escribir como:

$$\text{Área=}\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot r_2^2 - \frac{\beta-\alpha}{2}\cdot r_1^2 = \frac{\beta-\alpha}{2}(r_2^2 - r_1^2)$$

En el caso infinitesimal (trocitos de rectángulos polares) entonces:

$$A = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}(r_2-r_1)(r_2+r_1)\right), \text{ donde } \Delta\theta = \beta - \alpha \text{ y } \Delta r = (r_2 - r_1)$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{\Delta\theta}{2}\,\Delta r\,(r_1+r_2) \\ \Delta A &= \Delta\theta\,\Delta r\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Dado que cuando r_1 y r_2 son muy cercanos, el promedio, $\dfrac{r_1+r_2}{2}$, se parece a cualquiera de ellos.

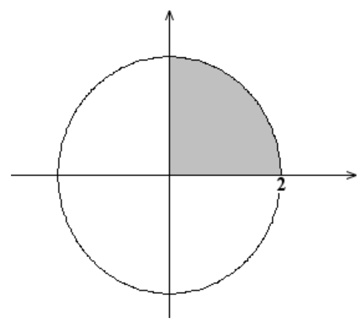
Así: $\Delta A = \Delta\theta\,\Delta r\cdot r$ o bien : $dA = d\theta\,dr\cdot r$

Teorema

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int\int_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$

Ejemplos

1. Calculemos la integral $\displaystyle\int\int_R \sqrt{4-x^2}\,dA$ donde $R=\left\{(x,y)\Big/ \begin{array}{l} 0\le x\le\ 2 \\ 0\le y\le \sqrt{4-x^2} \end{array}\right\}$



$$\begin{aligned} I &= \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\,dydx \\ &= \int_0^2 y\sqrt{4-x^2}\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_0^2 4-x^2\,dx \\ &= \left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 \\ &= \left(8-\frac{8}{3}\right) \\ I &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Ahora describiremos la misma integral en coordenadas polares:

$$\int\int_R \sqrt{4-x^2}\,dA = \int\int_R \sqrt{4-r^2\cos^2\theta}\ r\,dr\,d\theta$$

necesitamos describir R como un recángulo polar.

$$R=\left\{(r,\theta)\Big/ \begin{array}{l} 0\le r\le\ 2 \\ 0\le \theta\le \pi/2 \end{array}\right\}$$

por lo tanto la integral es:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \sqrt{4-r^2\cos^2\theta}\,r\,dr\,d\theta$$

2. Consideremos la integral $\displaystyle\int\int_R (x^2 + y^2)\, dA$, donde R es la misma region del ejemplo anterior (1/4 circulo)

   En coordenadas rectángulares

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)\, dydx \\ &= \int_0^2 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_0^2 x^2(\sqrt{4-x^2}) + \frac{(\sqrt{4-x^2})^3}{3}\, dx \end{aligned}$$

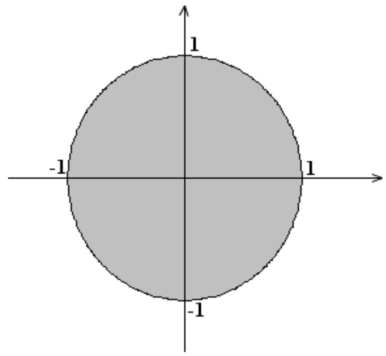
   La cual es muy complicada de resolver

   Probamos ahora cambiando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{16}{4}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} 4\, d\theta \\ &= 4\theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \end{aligned}$$

   Conclusión: en este caso la integral en coordenadas polares es mucho más facil.

3. $\displaystyle\int\int_R \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA$, donde R es el circulo de radio 1 centrado en el origen.



$$\Rightarrow \qquad R = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{c} -1 \leq x \leq \ 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}$$

por lo tanto

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\, dydx$$

en coordenadas polares

$$R = \left\{ (r,\theta) \Big/ \begin{array}{c} 0 \leq r \leq \ 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

por lo tanto

$$I = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \sqrt{4-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

esta integral es facil; ya que solamente se debe realizar la sustitución $u = 4 - r^2 \ \Rightarrow -\frac{du}{2} = r\, dr$

entonces

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4-r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(u^{1/2}\cdot -\frac{du}{2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\int_0^1 u^{1/2}\, du\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\frac{2u^{3/2}}{3}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}\Big|_0^1\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}(4-1)^{3/2} - (-\frac{1}{3}(4-0)^{3/2})\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3}+\frac{8}{3}\right) d\theta \\
&= -\theta\sqrt{3}+\frac{8}{3}\theta\Big|_0^{2\pi} \\
I &= -2\pi\sqrt{3}+\frac{16\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Observación

Sean $z = g(x,y)$ y $z = h(x,y)$ dos superficies con $g(x,y) \geq h(x,y)$ sobre una región R del plano. Entonces el volumen del sólido acotado por estas superficies sobre la región R está dad por:

$$\int\int_R (g(x,y) - h(x,y))\, dA$$

entonces:

$$V = \int\int_R techo - piso$$

2.6 Ejemplos de cálculos de volumen

1. Consideremos el sólido acotado por la semi-esfera superior de radio 2 centrada en el punto $(0,0,2)$y por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ que se ilustra en la Figura 1. Nos interesa calcular el volumen encerrado. Para esto debemos conocer las superficies, e identificar el *techo*, el *piso* y la *región* de integración.

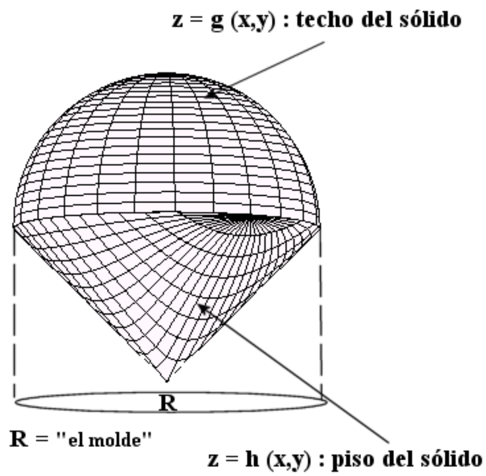


Figura 1

Cálculo de los volúmenes

(a)
$$V=\int\int_R (techo-piso)=\int\int_R (esfera-cono)$$

para avanzar necesitamos conocer

$*$ esfera

$*$ cono

el cono tiene la fórmula $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

La esfera esta centrada en el punto $(0,0,2)$. La fórmula de la esfera de radio 2 centrada en el $(0,0,0)$.

$$x^2+y^2+z^2=4$$

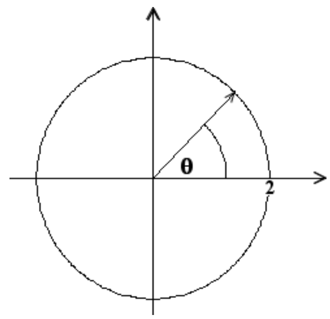
centrada en el $(0,0,2)$ será:

$$x^2+y^2+(z-2)^2=4$$
$$\Rightarrow\ \sqrt{4-x^2-y^2}+2=z\ esfera$$

Así:

$$V = \int\int_R \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} + 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \, dA$$

R es el cíırculo de radio 2 centrado en el origen.



Para describir R usaremos coordenadas polares:

$$R = \left\{ (r, \theta) \Big/ \begin{array}{c} 0 \leq r \leq \ 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\sqrt{4 - r^2} + 2 - r\right) r \, dr \, d\theta$$

Ahora:

$$\int_0^2 \left(\sqrt{4 - r^2} + 2 - r\right) r \, dr$$

$$\int_0^2 \left(\sqrt{4 - r^2} \cdot r + 2r - r^2\right) dr$$

ahora calculando esta integral, pero primero realizando la sustitución $u = 4 - r^2 \ \Rightarrow du = -2r \, dr$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\sqrt{4 - r^2} \cdot r + 2r - r^2\right) dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{3/2} + r^2 - \frac{r^3}{3}\right) \Bigg|_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} + 4 - \frac{8}{3}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta \\
&= 4\theta \Bigg|_0^{2\pi} \\
&= 8\pi \Rightarrow volumen
\end{aligned}$$

2. En este ejemplo, queremos calcular el volumen del sólido que está dentro el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre el plano xy, como lo ilustra la siguiente figura.

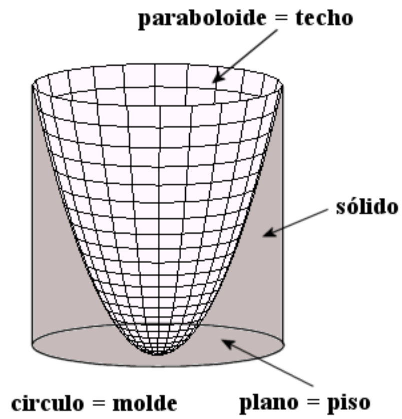


Figura 2

(a)

$$V = \int \int_R (paraboloide - plano)$$

nos falta
∗ paraboloide
∗ círculo
Sea $z = x^2 + y^2$ y sea R el círculo de radio 3 centrado en el origen.
Entonces:

$$V = \int \int_R (x^2 + y^2)\, dA$$

en coordenadas polares

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^3 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{4} \right) d\theta \\
&= \frac{81}{4} \theta \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{81\pi}{2}
\end{aligned}$$

¿Cuál es el volumen dentro del paraboloide? (altura 9)

$$V = \int\int_R (techo - piso)$$

$$V = \int\int_R (plano - paraboloide)$$

Plano: $z = 9$
paraboloide $z = x^2 + y^2$

$$V = \int\int_R (9 - x^2 - y^2)\, dA$$

coordenadas polares

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - r^2)\cdot r\, dr\, d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - r^2)\cdot r\, dr\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{81}{4}\, d\theta \\
&= \frac{81\pi}{2}
\end{aligned}$$

3. La Figura 3 muestra las superficies que determinan un sólido. Este sólido está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y está acotado por arriba por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y por abajo por el plano xy.

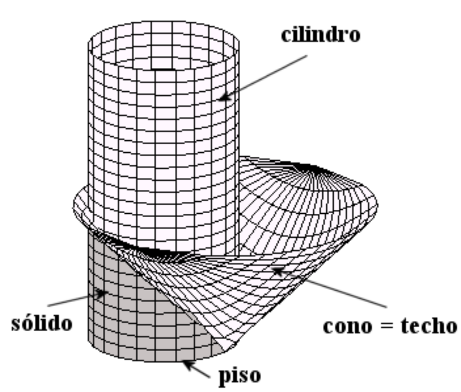


Figura 3

4. Este sólido se construye de manera similar al anterior. A saber, está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y está acotado por arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por abajo por el plano xy.

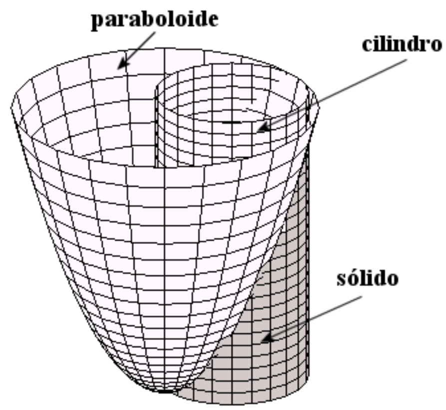


Figura 4

5. El sólido representado en la Figura 5 se define como el sólido dentro el cilindro $x^2+y^2 = 1$, cuyo techo es la semi-esfera superior de radio 1 centrada en el punto $(0, 0, 4)$ y cuyo piso es el plano $z = -1$.

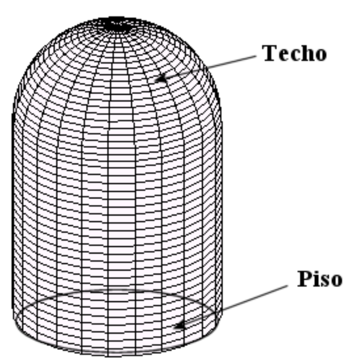


Figura 5

Los ejemplos 3, 4 y 5 se los dejamos como desafíos ha completar por el lector.

2.7 Aplicaciones de la integral doble

2.7.1 Centro de masa de una lámina

Sea L una lámina plana, cuya forma está dada por la región D del plano, de densidad (peso) variable. Sea $\rho(x,y)$ la densidad de la lámina en el punto (x,y). En caso que $\rho(x,y)$ sea constante (todos los puntos tengan la misma densidad) entonces decimos que la lámina es *homogénea*. La masa de la lámina L de densidad $\rho(x,y)$ está dada por:

$$m = \int\int_D \rho(x,y)\, dA$$

Los momentos de la lámina con respecto a los ejes x e y se definen como:

$$M_x = \int\int_D y \cdot \rho(x,y)\, dA \qquad M_y = \int\int_D x \cdot \rho(x,y)\, dA$$

El centro de masa de la lámina L es el punto del plano $(\overline{x}, \overline{y})$ cuyas coordenadas están dadas por:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int\int_D x \cdot \rho(x,y)\, dA}{\int\int_D \rho(x,y)\, dA} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int\int_D y \cdot \rho(x,y)\, dA}{\int\int_D \rho(x,y)\, dA}$$

Ejemplos

1. Una lámina L tiene forma de triángulo rectángulo isóceles con cateto de longitud a. La densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia al vértice opuesto de la hipotenusa. Encontrar su centro de masa.

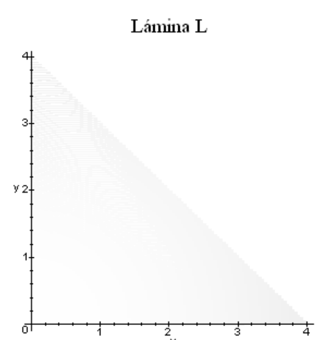


Figura 6

Solución:

Consideremos el triángulo de la figura (que se representó con $a = 4$) donde el vértice opuesto a la hipotenusa se ubicó en el origen. Por la definición, la densidad es el cuadrado de la distancia del punto (x, y) al origen. Por lo que $\rho(x,\, y) = k\,(x^2 + y^2)$, de modo que $m = \int_0^a \int_0^{a-x} k\,(x^2 + y^2)\, dy\, dx$.

$$
\begin{aligned}
m &= k \int_0^a \left(2x^2 a - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}a^3 - a^2 x\right) dx \\
&= \frac{1}{6} k\, a^4
\end{aligned}
$$

Asimismo,

$$
\begin{aligned}
M_y &= \int_0^a \int_0^{a-x} x\, k\,(x^2 + y^2)\, dy\, dx \\
&= k \int_0^a \left(2x^3 a - \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{3}x a^3 - a^2 x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{15} k\, a^5
\end{aligned}
$$

De forma análoga se obtiene M_x y con estos datos se determina el Centro de Masa como $[\frac{2\,a}{5},\, \frac{2\,a}{5}]$.

2. Una lámina L tiene la forma de la región R del plano xy acotada por las gráficas de $x = y^2$ y $x = 4$. La densidad en el punto $\text{P}(x,\, y)$ es directamente proporcional a la distancia la eje y. Calcular el centro de masa.

Solución:

Consideremos la figura dada

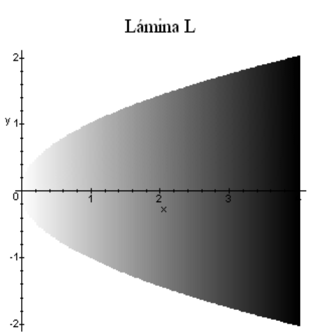


Figura 7

Por hipótesis $\rho(x,\, y) = kx$, para una constante k. Por la simetría de la figura, el centro de masa se encuentra sobre el eje x. De acuerdo a la definición:

$$\begin{aligned} m &= \int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} k\, x\, dx\, dy \\ &= \int_{-2}^{2}\left(8k - \frac{1}{2}y^4 k\right) dy \\ &= \frac{128}{5}k \end{aligned}$$

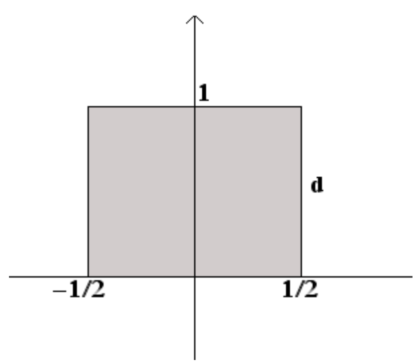
Además,

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} k\, x^2\, dx\, dy \\ &= \int_{-2}^{2}\left(\frac{64}{3}k - \frac{1}{3}y^6 k\right) dy \\ &= \frac{512}{7}k \end{aligned}$$

Recordemos que $\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{20}{7}$. Como el centro de masa se encuentra sobre el eje x, no es necesario calcular M_x, ya que $\overline{y} = 0$.

3. Sea D el cuadrado de la figura y supongamos que la densidad es constante.

   Sea $\rho(x,y) = 25$ (D es homogeneo)



$$\begin{aligned} M = \int\int_D \rho(x,y)\, dA &= \int\int_D 25\, dA \\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\int_0^1 25\, dy dx \\ M &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y = \int\int_D 25x\,dA &= \int_{-1/2}^{1/2}\int_0^1 25x\,dydx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} 25x\,dx \\ &= 25\frac{x^2}{2}\Big|_{-1/2}^{1/2} dx \\ M_y &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\Rightarrow\ \overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{0}{25} = 0$$

ahora

$$\begin{aligned} M_x = \int\int_D 25y\,dA &= \int_{-1/2}^{1/2}\int_0^1 25y\,dydx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{25y^2}{2}\Big|_0^1 dx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{25}{2}\,dx \\ M_x &= \frac{25}{2} \end{aligned}$$

entonces

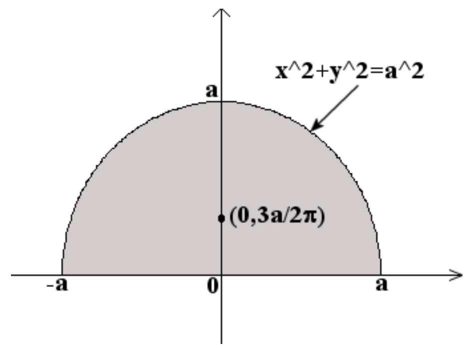
$$\Rightarrow\ \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{25/2}{25} = \frac{1}{2}$$

4. La densidad en cualquier punto de una lámina semicircular es proporcional a la distancia al centro del círculo. Encontrar el centro de la masa de la lámina.

   Solución:

   Situemos la lámina en la mitad superior del círculo $x^2+y^2 = a^2$ y observemos el gráfico. La distancia de un punto (x, y) al centro del círculo (el origen) es $\sqrt{x^2 + y^2}$, por lo tanto , la función de densidad es

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$



en donde K es cierta constante. Tanto la función densidad como la forma de la lámina sugieren que se haga la conversión a coordenadas polares. Entonces $\sqrt{x^2+y^2} = r$ y la región R está descrita por $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$. De modo que la masa de la lámina es:

$$m = \int\int_R \rho(x,y)dA = \int\int_R K\sqrt{x^2+y^2}dA$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_0^{a}(Kr)rdrd\theta &= K\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a}r^2dr \\
&= K\pi\frac{r^3}{3}\bigg|_0^a \\
\int\int_R \rho(x,y)dA &= \frac{K\pi a^3}{3}
\end{aligned}$$

Tanto la lámina como la función de densidad son simétricas con respecto al eje y, así que el centro de masa debe encontrarse en el eje y, esto es , $x = 0$. La coordenada y está dada por

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int\int_R y\rho(x,y)dA$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\int\int_R y\rho(x,y)dA &= \frac{3}{K\pi a^3}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r\sin\theta(Kr)rdrd\theta \\
&= \frac{3}{\pi a^3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{a}r^3dr \\
&= \frac{3}{\pi a^3}[-\cos\theta]\bigg|_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]\bigg|_0^a \\
&= \frac{3}{\pi a^3}\frac{2a^4}{4} \\
\overline{y} &= \frac{3a}{2\pi}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masa se encuentra en el punto $\left(0, \dfrac{3a}{2\pi}\right)$

2.7.2 Area de una Superficie

Cálculo del área de una superficie

Sea $z = f(x, y)$ una superficie definida sobre una región R. Entonces el área de una superficie está dada por:

$$A = \int\int_R \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}$$

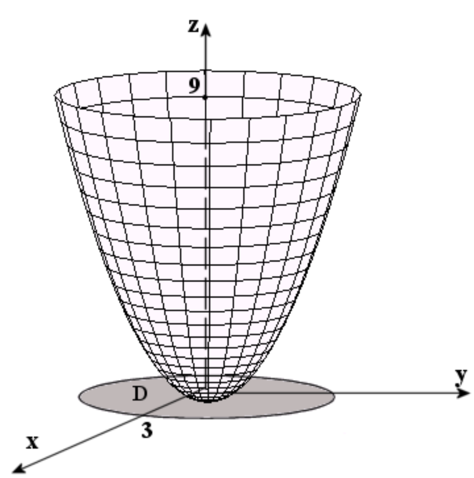
$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ejemplo:

1. Comenzaremos los ejemplos con uno simple. No proponemos encontrar el área de la porción del paraboloide (superficie) $z = x^2 + y^2$ que se encuentra bajo el plano $z = 9$

   Solución:

   El plano intersecta al paraboloide en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Por lo tanto, la superficie considerada se encuentra arriba del disco con centro en el origen y radio 3 (véase el gráfico).



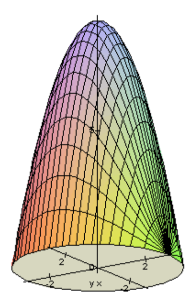
Aplicando la fórmula del área de una superficie con $f(x,y) = x^2 + y^2$, se tiene:

$$A = \int\int_D \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}dA = \int\int_D \sqrt{4(x^2+y^2)+1}dA$$

Luego convirtiendo a coordenadas polares, se tiene

$$\begin{aligned} A = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}rdrd\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \frac{1}{8}\sqrt{4r^2+1}(8r)dr \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{8}\right)\frac{2}{3}(4r^2+1)^{3/2}\Big|_0^3 \\ &= \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1) \\ A &= \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1) \approx 117.31 \end{aligned}$$

2. La figura que sigue corresponde a un sólido (mal pintado) acotado por arriba por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y por abajo por el plano xy. Este sólido está visto desde abajo del plano xy (las medidas se entenderán en metros) . Si un tarro de pintura cubre una superficie de $2\,mts^2$ y se han comprado 60 tarros. ¿Es posible pintar este sólido?.



Solución:

En este caso, la superficie total no es sólo (y este es el principal error) la superficie del paraboloide (como en el ejemplo anterior), puesto que el *sólido* incluye también la *tapa* circular. Para calcular el área total, dividamos el problema en dos partes. El cálculo del área del paraboloide y el cálculo del área del círculo (tapa).

Dado que en este caso, $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$, entonces $f_x = -2x$ y $f_y = -2y$ por lo que la fórmula para el área coincide con el ejemplo anterior (al final de cuentas es el mismo trozo de paraboloide). Así tenemos:

$$A = \int\int_D \sqrt{4(x^2+y^2)+1}dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \frac{1}{8}\sqrt{4r^2+1}(8r)dr \qquad (2.1)$$

$$A = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1) \approx 117.31 \qquad (2.2)$$

Ahora a esto le sumamos el área del círculo de radio 3 con la fórmula πr^2 para obtener un valor aproximado de 28.27. Sumando ambos valores:

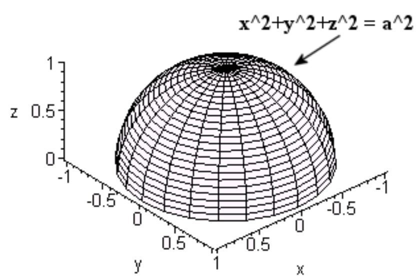
$$A = 145.58$$

Por lo que el número de tarros de pintura deberá ser 73.

3. Encontrar la fórmula para el área de una superficie de una esfera.

Solución:

El área de una superficie de una esfera es igual a dos veces la superficie de una semi esfera que tiene la siguiente ecuación $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.



(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cdot -2x = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cdot -2y = \dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2-y^2} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow 1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2 = 1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2} = 1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$$

Por lo tanto:

$$A = \int\int_R \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA$$

$R =$ circulo de radio a centrado en el origen.

Para resolver está integral se ocupa el método de coordenadas polares; es decir la sustitución $r = x^2 + y^2$ y despues otra sustitución $u = a^2 - r^2 \Rightarrow -\frac{du}{2} = r\,dr$.

$$\begin{aligned} A = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} r\,dr\,d\theta &= a\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r}{a^2 - r^2}\,dr\,d\theta \\ &= -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a u^{-1/2}\,du\,d\theta \\ &= -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi} -2u^{1/2}\Big|_0^a\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= a^2\theta\Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi a^2 \end{aligned}$$

luego como el área es 2 veces el área del hemisferio:

$$2 \cdot 2\pi a^2 = 4\pi a^2$$

2.8 Apéndice: Algunas Curvas Famosas y sus ecuaciones

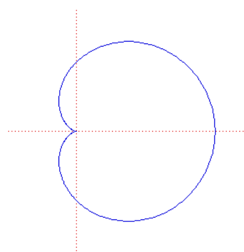
(las figuras fueron tomadas del sitio:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Curves/Curves.html)

El cardioide (caso particular del caracol) tiene ecuación cartesiana:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

y ecuación polar:

$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

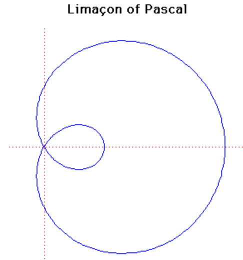


El caracol tiene ecuación cartesiana

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$

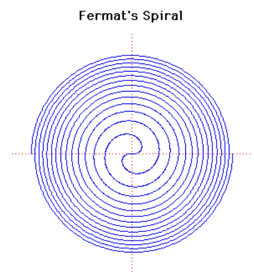
y ecuación polar:

$$r = b + 2a\cos\theta$$



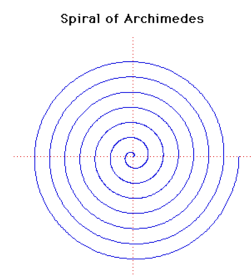
La espiral de Fermat tiene ecuación polar:

$$r^2 = a^2\theta$$



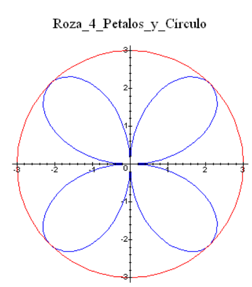
La espiral de Arquimedes tiene ecuación polar:

$$r = a\theta$$



La roza de 4 pétalos tiene ecuación polar (la figura se ilustra con el círculo de radio a):

$$r = a \sin 2\theta$$

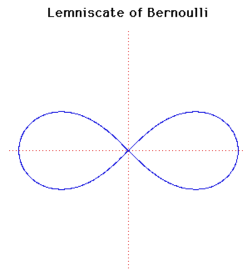


La lemniscata de Bernoulli tiene ecuación cartesiana:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

y ecuación polar:

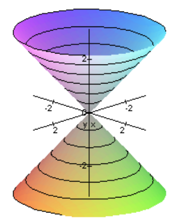
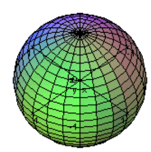
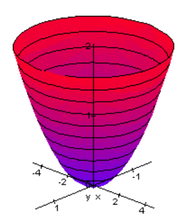
$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

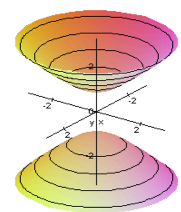
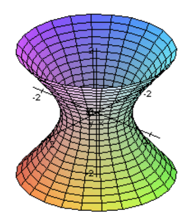
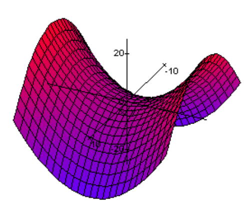


2.9 Apéndice: Las superficies cuadráticas

Los gráficos que siguen corresponden a las superficies cuadráticas en su forma estándar. Estas provienen (mediante rotación y traslación) de la ecuación cuadrática general en tres variables:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0$$

Cono	$z^2 = x^2 + y^2$
Ecuación estándar $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$	
Esfera	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
Ecuación estándar $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	
Paraboloide elíptico	$z = x^2 + \dfrac{y^2}{10}$
Ecuación estándar $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$	

Hiperboloide de dos hojas	$x^2 + y^2 - z^2 = -1$
Ecuación estándar $\dfrac{x^2}{l^2} + \dfrac{y^2}{n^2} - \dfrac{z^2}{m^2} = -1$	
Hiperboloide de una hoja	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$
Ecuación estándar $\dfrac{x^2}{l^2} + \dfrac{y^2}{n^2} - \dfrac{z^2}{m^2} = 1$	
Paraboloide Hiperbólico	$z = x^2 - \dfrac{y^2}{4}$
Ecuación estándar $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$	

Capítulo 3

Integrales triples

3.1 Integrales Triples

Sea $f(x, y, z)$ una función en tres variables. Las integrales triples se definen sobre un sólido tridimensional en lugar de una región plana. Es decir, la región de integración en este caso es un sólido. El gráfico de la función f es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$ (que corresponde al gráfico de la ecuación: $w = f(x, y, z)$). Por esta razón no se puede representar la función en el espacio tridimensional.

Las integrales triples, que veremos en este capítulo, estarán restringidas a ciertos sólidos en el espacio. Más especificamente, un sólido Ω será un sólido de integración si está acotado por arriba por una superficie $z = h_2(x, y)$ y por abajo por una superficie $z = h_1(x, y)$ y sobre una región del plano R de tipo I, II ó III. En síntesis:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \Big/ \begin{array}{c} (x, y) \in R \\ h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y) \end{array} \right\}$$

Por ejemplo, el sólido Ω dado se intenta representar en las dos figuras que siguen. Este sólido está acotado por arriba por la superficie $z = 8 + x^2 - y^2$ (paraboloide hiperbólico o *silla de montar*) y por abajo por la superficie $z = x^2 + y^2$ (paraboloide circular). La Figura (a) muestra el espacio que se forma entre el techo, el piso y sobre el rectángulo, en el plano, dado por $-2 \leq x \leq 2$ y $-2 \leq y \leq 2$. La Figura (b) muestra el mismo espacio, esta vez cerrado para representar el sólido.

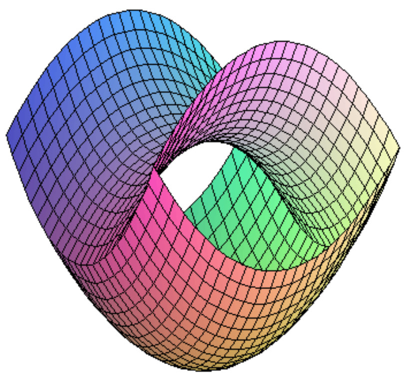


Figura (a)

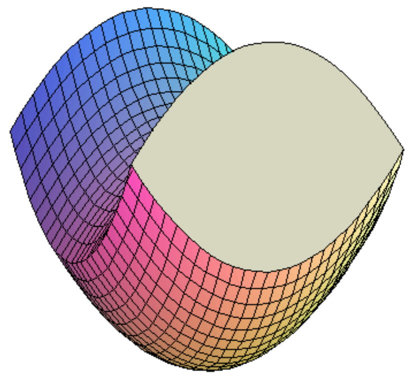


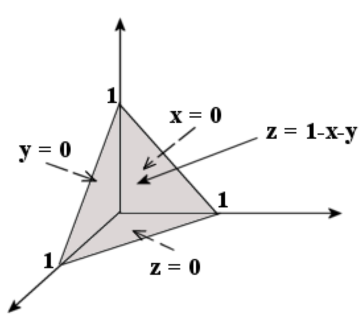
Figura (b)

Entonces, definimos la integral triple de una función $f(x,y,z)$ sobre el sólido Ω como:

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \int\int_{R}\left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dA$$

Ejemplo 1: Sea Ω el sólido acotado por el plano $x+y+z=1$, los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$. Calcular:

$$\int\int\int_{\Omega} e^x(y+2z)\,dV$$



Solución:

- techo de Ω: $h_2(x,y) = 1-x-y$

- piso de Ω: $h_1(x,y) = 0$
- sombra de Ω: triangulo en el plano xy

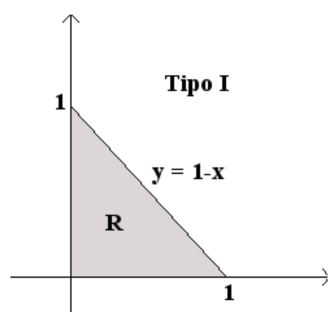
Entonces, por la definición anterior

$$\int\int\int_{\Omega} e^x(y+2z)\,dV = \int\int_R \left[\int_0^{1-x-y} e^x(y+2z)\,dz\right] dA$$

Calculemos en primer lugar la integral parcial con respecto a z:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-x-y} e^x(y+2z)\,dz &= \int_0^{1-x-y} e^x(y+2z)\,dz \\
&= \left[e^x yz + e^x z^2\right]\Big|_0^{1-x-y} \\
&= e^x y(1-x-y) + e^x(1-x-y)^2 \\
&= e^x + e^x x^2 - 2e^x x + e^x xy - e^x y
\end{aligned}$$

Luego integramos este resultado sobre la región del plano R.



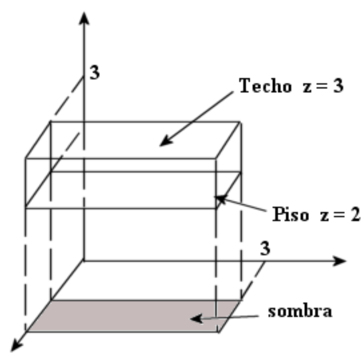
$$R = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{l} 0 \le x \le \ 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{array} \right\}$$

Finalmente, la integral doble que resulta es fácil de calcular (le dejamos al lector esta tarea) y damos aquí el resultado numérico:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (e^x + e^x x^2 - 2e^x x + e^x xy - e^x y)\,dydx \quad = \quad \frac{6e-21}{8}$$

Ejemplo 2: Sea Ω el sólido dibujado (paralelepípedo), calcule:

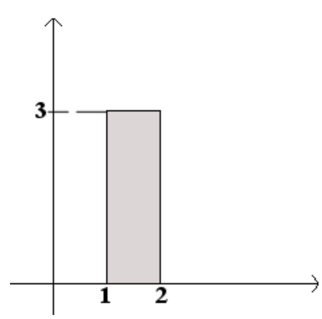
$$\int\int\int_{\Omega}(x+y^2+z^3)\,dV$$



Sólido de integración Ω

Solución:

La región de integración es la ilustrada:



Región R *del plano*

En términos analíticos, esta región se describe por:

$$R=\left\{(x,y)\Big/\begin{array}{c}1\leq x\leq\ 2\\0\leq y\leq 3\end{array}\right\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int\int\int_{\Omega}(x+y^2+z^3)\,dV &= \int_1^2\int_0^3\int_2^3 (x+y^2+z^3)\,dzdydx \\
&= \int_1^2\int_0^3 \left(xz+y^2z+\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_2^3 dydx \\
&= \int_1^2\int_0^3 \left(x+y^2+\frac{65}{4}\right) dydx \\
&= \int_1^2 \left(xy+\frac{y^3}{3}+\frac{65y}{4}\right)\Bigg|_0^3 dx \\
&= \int_1^2 \left(3x+\frac{27}{3}+\frac{195}{4}\right) dx \\
&= \left(\frac{3x^2}{2}+\frac{231x}{4}\right)\Bigg|_1^2 dx \\
&= \frac{249}{4}
\end{aligned}$$

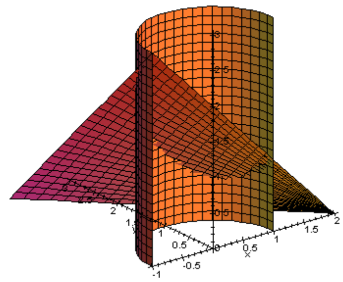
Observación: el volumen de un sólido es:

$$V=\int\int\int_{\Omega} dV$$

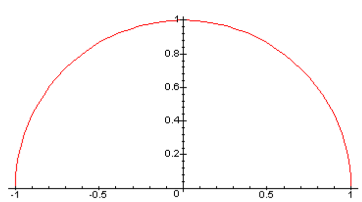
Ejemplo 3: Calcular el volumen del sólido acotado por las siguientes superficies:

$x^2+y^2=1$	cilindro	$y=0$	plano
$x+y+z=2$	plano	$z=0$	plano

El gráfico muestra el interior del semi-cilindro y su intersección con el plano (visto desde el eje x negativo).



En este caso, el techo (plano diagonal) corresponde a la superficie $z = 2 - x - y$. Asimismo, el piso (plano) es la superficie $z = 0$ y finalmente, la región de integración R es el semi-círculo de la figura.



$$
\begin{aligned}
V = \int\int_R \left(\int_0^{2-x-y} dz\right) dA &= \int\int_R 2-x-y\, dA \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^1 (2-r\cos\theta - r\sin\theta)\, r dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^1 (2r - r^2\cos\theta - r^2\sin\theta)\, dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta - \frac{r^3}{3}\sin\theta\right)\Bigg|_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{3}\sin\theta\right) d\theta \\
&= \theta\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi}(\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta \\
&= \pi - \frac{1}{3}(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\pi} \\
&= \pi - \frac{1}{3}(0+1-0+1) = \pi - \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4: Veamos ahora el ejemplo con que iniciamos el capítulo, en el que el techo de la región es el paraboloide hiperbólico $z = 8 + x^2 - y^2$ y como piso al paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre el rectángulo $R = \{(x,y) \mid -2 \leq x \leq 2, \quad -2 \leq y \leq 2\}$. Calculemos el volumen de este sólido y la integral dada:

$$\int\int\int_\Omega xyz\, dV$$

Para calcular el volumen usamos la fórmula

$$V = \int\int\int_\Omega dV$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
V = \int\int_R \left[\int_{x^2+y^2}^{8+x^2-y^2} dz\right] dA &= \int\int_R \left(8-2y^2\right) dA \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} (8-2y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left[8y - \frac{2}{3}y^3\right]_{-2}^{2} dx \\
&= \int_{-2}^{2} (32 + \frac{32}{3})\, dx \\
&= 128 + \frac{128}{3}
\end{aligned}
$$

Nos abocamos ahora a calcular la integral

$$\int\int\int_\Omega xyz\, dV$$

$$
\begin{aligned}
\int\int\int_\Omega xyz\, dV &= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{x^2+y^2}^{8+x^2-y^2} xyz\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} xy\frac{z^2}{2}\Big]_{x^2+y^2}^{8+x^2-y^2} dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} xy((8+x^2-y^2)^2 - (x^2+y^2)^2)\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} (64xy + 16x^3y - 16xy^3 - 4x^3y^3)\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} 0\, dx = 0
\end{aligned}
$$

Ejemplos adicionales: Veremos ahora tres ejercicios de muestra para practicar la descripción de un sólido de integración en términos de desigualdades, para llegar a plantear una integral iterada (que no calcularemos por el momento).

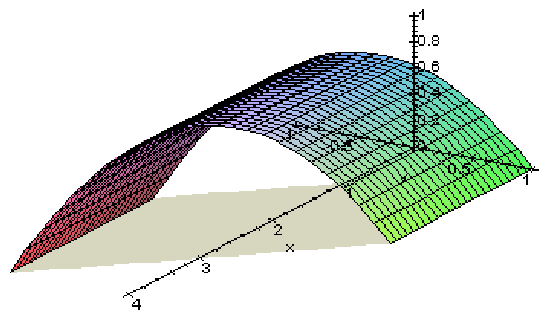
1. Ω es el sólido acotado por el cilindro $z = 1 - y^2$ y los planos verticales $x + y = 1$ y $x + y = 3$ y el plano xy.

2. Ω es el sólido acotado por abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por arriba por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

3. Ω es el sólido acotado por $x = 4 - y^2$ (cilindro parabólico) y los planos $z = x$ y $z = 0$.

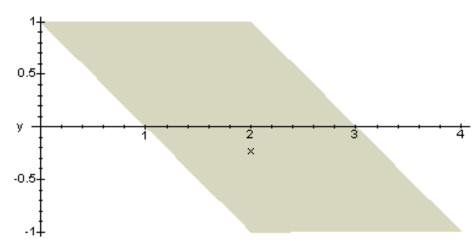
Solución:

1. Debemos responder las preguntas:
   - $h_1(x, y)$
   - $h_2(x, y)$
   - Describir R como región de tipo I, II y III



Representación del sólido de integración

En este caso, es claro que el piso es la superficie $h_1(x, y) = 0$ y el techo $h_2(x, y) = 1 - y^2$.



Región R del plano (sombra)

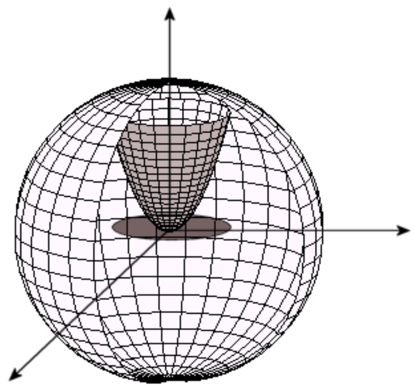
En este caso R puede ser interpretada como una región de tipo II, a saber:

$$= \left\{ (x, y) \Big/ \begin{array}{l} -1 \leq y \leq 1 \\ 1 - y \leq x \leq 3 - y \end{array} \right\}$$

por lo tanto:

$$\int\int\int_{\Omega} f(x, y, z)\, dv = \int_{-1}^{1} \int_{1-y}^{3-y} \int_{0}^{1-y^2} f(x, y, z)\, dzdxdy$$

2. En este caso, el techo corresponde a la superficie (semi-esfera) $h_2(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$. Asimismo, el piso es la superficie (paraboloide) $h_1(x, y) = x^2 + y^2$ y finalmente, la región de integración R es el círculo $x^2 + y^2 = 2$



$$\Rightarrow \int\int\int_{\Omega} f(x, y, z)\, dv = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dzdydx$$

3. Dejamos al lector el comprobar (vía un gráfico adecuado) que:

$$\int\int\int_{\Omega} f(x, y, z)\, dv = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-y^2} \int_{0}^{x} f(x, y, z)\, dzdxdy$$

3.2 Aplicaciones básicas: centro de masa de un sólido

Los "momentos primeros"de un sólido Ω se definen como:

$$M_{yz} = \int\int\int_{\Omega} x\rho(x, y, z)\, dV \quad M_{xz} = \int\int\int_{\Omega} y\rho(x, y, z)\, dV \quad M_{xy} = \int\int\int_{\Omega} z\rho(x, y, z)\, dV$$

Donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad del sólido en el punto (x, y, z)

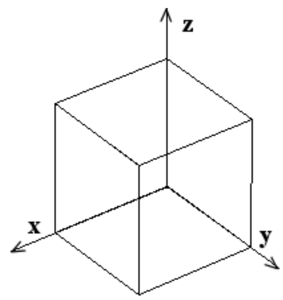
Entonces la masa del sólido

$$m = \int\int\int_{\Omega} \rho(x, y, z)\, dV$$

El centro de masa del sólido Ω es un punto en el espacio $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ definido por:

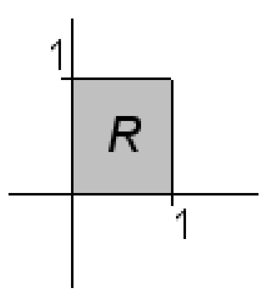
$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Ejemplo: Consideremos el cubo de la figura y supongamos que la densidad en el punto (x, y, z) es el cuadrado de la distancia de este punto al origen (0,0,0)



Para calcular el centro de masa necesitamos m y los "momentos primeros"

- $\rho(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- $m = \int\int\int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$
  ahora necesitamos una descripción adecuada del solido Ω
- piso (superficie) $z = h_1(x, y)$
- techo (superficie) $z = h_2(x, y)$
- sombra, el plano$= R$
- El piso es el plano xy, por lo tanto con ecuación $z = 0$
- El techo es un plano con ecuación $z = 1$
- La sombra es un cuadrado



por lo tanto

$$m = \int \int_{R} \left[\int_{0}^{1} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz \right] dA$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\, dzdydx &= \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^1 dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \right) dydx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{3} y \right) \Big|_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} \right) \Big|_0^1 \\
m &= 1
\end{aligned}$$

Para calcular $\overline{x}$ necesitamos conocer:

$$
\begin{aligned}
M_{yz} &= \iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dV \\
&= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x(x^2+y^2+z^2)\,dzdydx \\
&= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^3+xy^2+xz^2)\,dzdydx \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left(x^3z+xy^2z+\frac{xz^3}{3}\right)\Big|_0^1 dydx \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left(x^3+xy^2+\frac{x}{3}\right) dydx \\
&= \int_0^1 \left(x^3y+\frac{xy^3}{3}+\frac{xy}{3}\right)\Big|_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(x^3+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\right) dx \\
&= \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\right) \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

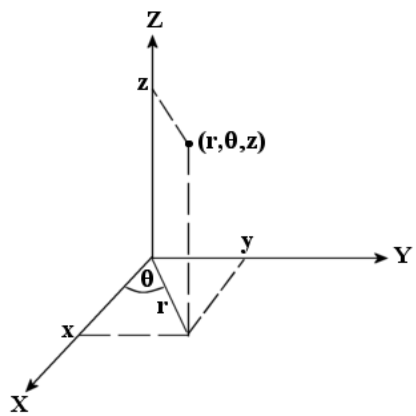
Po lo tanto $\overline{x}=\frac{7}{12}$. Del mismo modo se puede comprobar que $\overline{y}=\frac{7}{12}$ y que $\overline{z}=\frac{7}{12}$. Por lo tanto, el centro de masa es el punto $(\frac{7}{12},\frac{7}{12},\frac{7}{12})$.

3.3 Integrales en coordenadas cilíndricas y Esféricas

- Coordenadas cilíndricas : Una manera alternativa de representar puntos en el espacio.
- Descipción de las coordenadas cilíndricas: Todo punto en el espacio se puede representar por un triple (r,θ,z), en el que el par (r,θ) corresponde a la representación en coordenadas polares del punto (x,y).

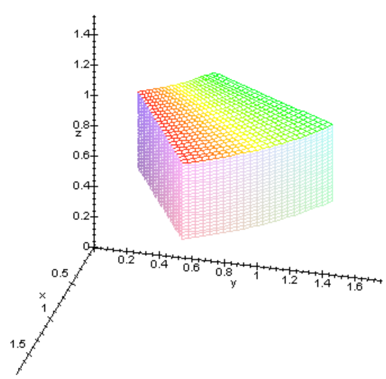
La figura que sigue muestra cómo se interpreta el punto (r,θ,z) en el espacio y la relación con las coordenadas rectangulares habituales. En particular, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$



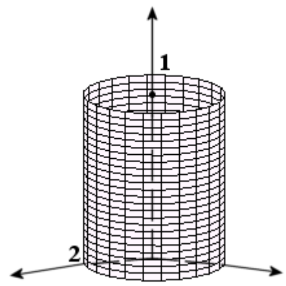
El elemento sólido de la descripción mas simple tiene la siguiente forma:

$$\Omega = \left\{ (r,\theta,z) \Big/ \begin{array}{l} a \leq r \leq \ b \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \\ c \leq z \leq d \end{array} \right\}$$

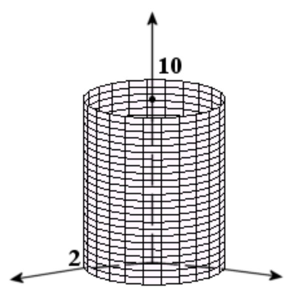


Ejemplos numéricos:

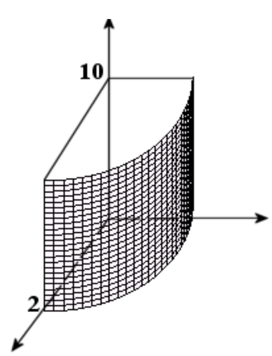
$$\Omega_1 = \left\{ (r,\theta,z) \Big/ \begin{array}{c} 0 \le r \le\ 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 1 \end{array} \right\}$$



$$\Omega_2 = \left\{ (r,\theta,z) \Big/ \begin{array}{c} 0 \le r \le\ 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 10 \end{array} \right\}$$



$$\Omega_3 = \left\{ (r,\theta,z) \Big/ \begin{array}{c} 0 \le r \le\ 2 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le z \le 10 \end{array} \right\}$$



Para cambiar una integral triple de coordenadas rectangulares a una de coordenadas cilíndricas, se usa la siguiente fórmula:

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

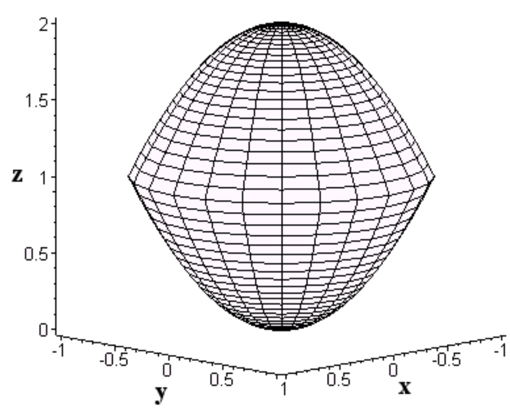
Ejemplo 1:

Calcular la integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dzdydx$$

Solución:

El dominio de integración esta limitado por arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ y por abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$



entonces cambiando a coordenadas cilíndricas tenemos:

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dzdydx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{r^2}^{2-r^2} r^4\,dz\,dr\,d\theta$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r^2} r^4\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 z\Big|_{r^2}^{2-r^2} r^4\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^4-2r^6\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{2r^5}{5}-\frac{2r^7}{7}\right]\Big|_0^1 d\theta \\
&= \frac{4}{35}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{8\pi}{35}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Calcular el volumen de una esfera de radio a.

Solución:

Sabemos que

$$vol = \int\int\int_\Omega dV$$

Por lo que necesitamos una descripción de la esfera como un sólido de integración de manera que podamos calcular la integral triple usando integrales iteradas. Para lograr esto, primero ubicamos la esfera en el espacio de modo que esté centrada en el origen: la ecuación de la esfera es $x^2+y^2+z^2=a^2$. Entonces, el piso y el techo de la esfera corresponden a las siguientes superficies: $z=-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ y $z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ respectivamente. La región R del plano (sombra) de este sólido es el círculo de radio a^2: $x^2+y^2=a^2$. Así, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
V &= \int\int_R\left[\int_{-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} dz\right] dA \\
&= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left[\int_{-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} dz\right] dy\,dx
\end{aligned}$$

Esta integral iterada presenta problemas técnicos para su cálculo. Sin embargo, si usamos coordenas cilíndricas para representar el sólido, el problema técnico desaparece, como veremos a continuación.

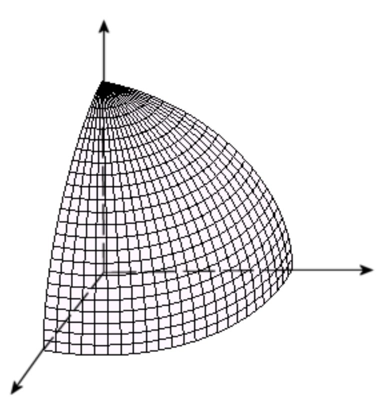
$$
\begin{aligned}
V &= \int\int_R \left[\int_{-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} dz \right] dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz \right] r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a z\,r \Big[_{z=-\sqrt{a^2-r^2}}^{z=\sqrt{a^2-r^2}} dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a 2r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big[_0^a d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}a^3\,d\theta \\
V &= \frac{4\pi}{3}a^3
\end{aligned}
$$

Esta última es la fórmula clásica para el volumen de la esfera de radio a.

Ejemplo 3:

Encuentre el centroide de la parte del primer octante de la pelota sólida limitada por la esfera $r^2 + z^2 = a^2$

Solución:



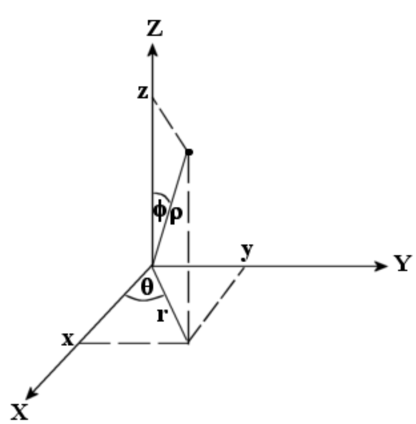
El volumen del primer octante de la pelota sólida es $V = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{4}{3}\pi r^2\right) = \dfrac{1}{6}\pi a^3$. Dado que $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z}$ por simetria, se necesitará calcular sólo:

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{V}\int\int\int z\,dV \\
&= \frac{6}{\pi a^3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z\,r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \frac{6}{\pi a^3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\frac{r}{2}(a^2-r^2)\,dr\,d\theta \\
&= \frac{3}{\pi a^3}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}a^2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]\Bigg|_0^a d\theta \\
&= \frac{3}{\pi a^3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{4} \\
&= \frac{3a}{8}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el centroide se localiza en $(3a/8, 3a/8, 3a/8)$

Coordenadas Esféricas

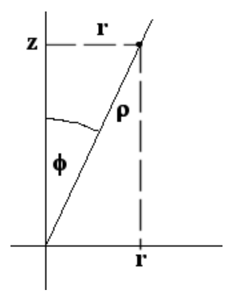
Las coordenadas esféricas son una manera alternativa de describir un punto en el espacio tridimensional. Sea P un punto del espacio con coordenadas (x, y, z). Esto se ilustra en la figura siguiente.



- $\rho =$ distancia al origen desde el punto

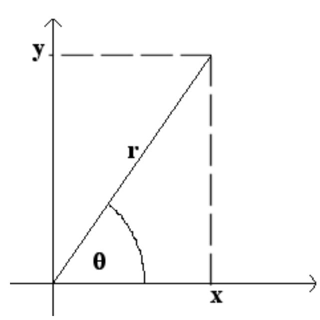
- θ = ángulo que tiene el punto con respecto al eje x (ángulo en el plano xy de la proyección de P con el eje x)
- ϕ = ángulo del rayo OP con respecto al eje z

Las coordenadas esféricas de este punto son $P(\rho, \theta, \phi)$. ¿Cómo transformar de un conjunto de coordenadas al otro? Observemos el siguiente triangulo:



$$\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{z}{\rho} \\ z &= \rho\cos\phi \\ \Rightarrow \sin\phi &= \frac{r}{\rho} \\ r &= \rho\sin\phi \end{aligned}$$

Mirando el plano xy



$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Luego, si reemplazamos r por $\rho \sin \phi$ en la igualdad, obtenemos la relación entre las coordenadas rectangulares y las esféricas.

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

Del mismo modo, observemos que conociendo las coordenadas x, y, z es posible obtener las coordenadas ρ, θ, ϕ con las identidades (3.1), (3.2) y (3.5).

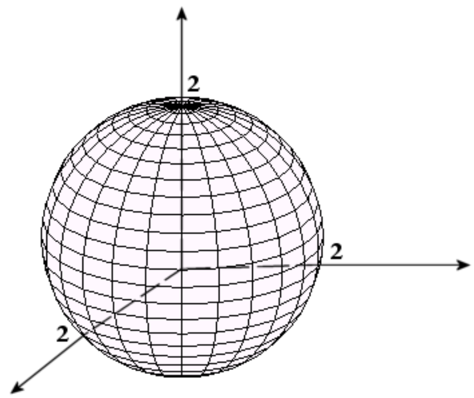
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \phi \\ &= \rho^2 \left(\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi \right) \\ &= \rho^2 \left(\sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \phi \right) \\ &= \rho^2 \left(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right) \\ &= \rho^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \qquad (3.1) \end{aligned}$$

$$\frac{y}{x} = \tan \theta \qquad (3.2)$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \sin^2 \phi \qquad (3.3) \\ z^2 &= \rho^2 \cos^2 \phi \qquad (3.4) \\ \frac{x^2 + y^2}{z^2} &= \tan^2 \phi \qquad (3.5) \end{aligned}$$

Algunas ecuaciones elementales

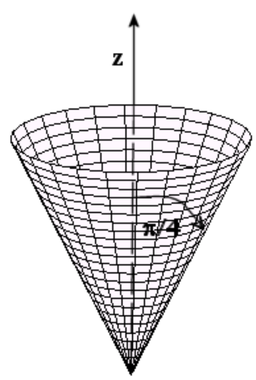
1. La ecuación en coordenadas esféricas $\rho = 2$ se puede tranformar a una en coordenadas rectangulares. Simplemente elevamos al cuadrado la ecuación original para obtener: $\rho^2 = 4$. Usando la identidad (3.1), obtenemos: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (una esfera de radio 2 centrada en al origen).



2. La ecuación en coordenadas esféricas $\phi = \pi/4$ representa un cono. Esto se puede comprobar directamente:

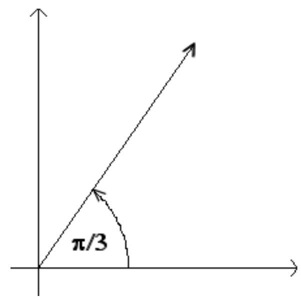
   Si $\phi = \pi/4$ entonces $\tan\phi = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ z &= \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$



3. La ecuación en coordenas esféricas $\theta = \pi/3$ representa un plano. Para verificar esto usamos nuevamente las relaciones entre los sistemas de coordenadas, en particular la identidad (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \tan\theta \\ &= \tan\pi/3 = \sqrt{3} \\ y &= \sqrt{3}x \Rightarrow \textit{plano vertical} \end{aligned}$$



Entonces, lo que sabemos hasta el momento es :

- $\rho = a$: esfera de radio a centrada en el origen
- $\phi = \alpha$: cono cuya "pared" forma un angulo α con el eje z
- $\theta = \beta$: plano perpendicular al plano xy cuya proyección sobre el plano xy forma un angulo β con el eje x

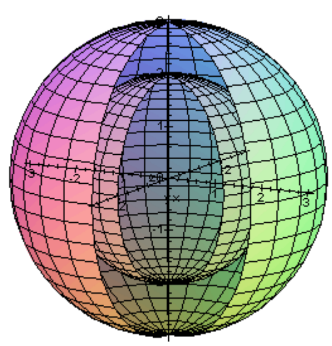
Consideremos el sólido Ω dado (y que podríamos denominar, por analogía, el *paralelepípedo esférico*)

$$\Omega = \left\{ (\rho, \phi, \theta) \Big/ \begin{array}{c} a \leq \rho \leq b \\ \alpha \leq \phi \leq \beta \\ \gamma \leq \theta \leq \delta \end{array} \right\}$$

Dibujaremos primero sus partes, es decir lo que cada par de desigualdades produce, para intentar entender el total. En primer lugar, las desigualdades:

$$a \leq \rho \leq b$$

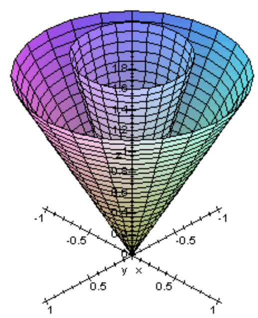
corresponden al sólido entre las esferas de radio a y b, que podemos apreciar en la figura.



Asimismo, las desigualdades

$$\alpha \leq \phi \leq \beta$$

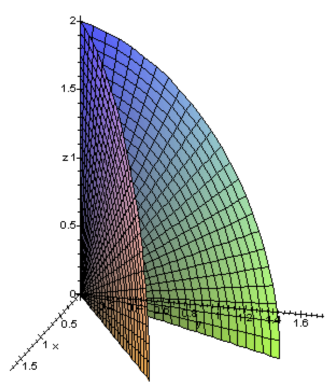
corresponden al sólido entre los dos conos:



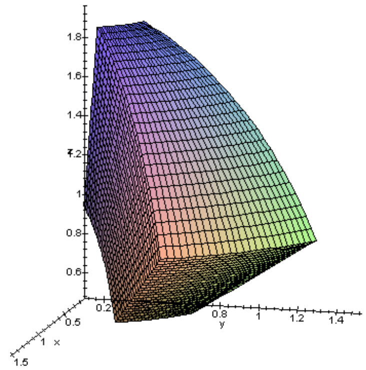
Y finalmente

$$\gamma \leq \theta \leq \delta$$

corresponden al sólido entre los planos que se ilustran.



El sólido total, que representa a Ω es

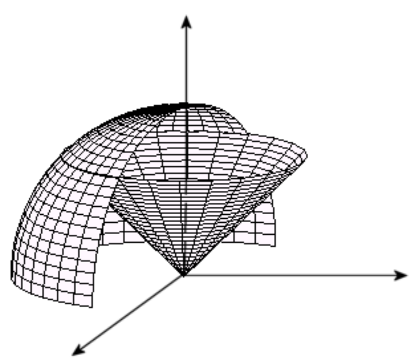


Para cambiar una integral triple de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas:

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_{\Omega} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Ejemplo 1:

Calcular el volumen al interior del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y bajo la esfera $x^2+y^2+z^2=9$



Solución: Se tienen los siguientes elementos:

Superficie techo: esfera $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

Superficie piso: cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Sombra R : círculo que debemos identificar

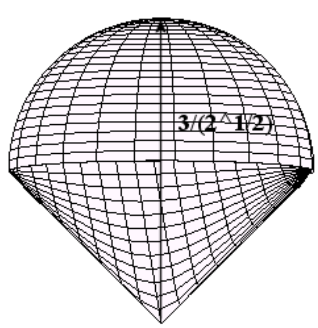
Reemplazando la igualdad $x^2+y^2=z^2$ en la ecuación $x^2+y^2+z^2=9$, se obtiene,

$$\begin{aligned} z^2+z^2 &= 9 \\ 2z^2 &= 9 \\ z^2 &= \frac{9}{2} \\ z &= \frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow altura \end{aligned}$$

Entonces, la esfera y el cono se intersectan a la altura $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Reemplazando z en $x^2+y^2+z^2=9$, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 9 \\ x^2+y^2+\frac{9}{2} &= 9 \\ x^2+y^2 &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Entonces, la sombra, R, es un círculo centrado en el origen y de radio $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$



Debemos representar el sólido en coordenadas esféricas.

$$\Omega = \left\{ (\rho,\phi,\theta) \Big/ \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 3 \\ 0 \le \phi \le \pi/4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right\}$$

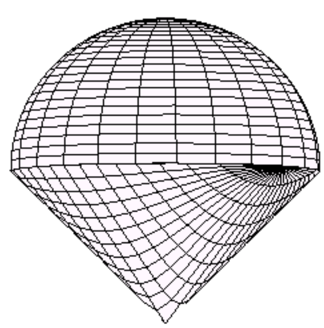
entonces el volumen del sólido, con un cambio de variables es:

$$V = \int\int\int_{\Omega} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^3 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\
&= 9 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\
&= -9 \int_0^{2\pi} \left.\cos\phi\right|_0^{\pi/4} d\theta \\
&= -9 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) d\theta \\
&= 9 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 18\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Encuentre el volumen y el centroide (suponiendo que la densidad es la constante 1) del **cono de helado** (barquillo) limitado por el cono $\phi = \pi/6$ y la esfera $\rho = 2a\cos\phi$ de radio a y tangente al plano xy en el origen. La esfera y la parte del cono interior a ella se muestra en la figura.



Solución:

El cono de helado se describe mediante las desigualdades

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \qquad 0 \leq \rho \leq 2a\cos\phi$$

entonces, para calcular el volumen tenemos:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2a\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{8a^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \cos^3\phi \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{16\pi a^3}{3}\left[-\frac{1}{4}\cos^4\phi\right]\Bigg|_0^{\pi/6} \\ &= \frac{7\pi a^3}{12} \end{aligned}$$

En cuanto al centroide, es claro por simetría que $\overline{x} = 0 = \overline{y}$. Además, dado que la densidad es 1, la masa coincide con el volumen. Asimismo, puesto que $z = \rho\cos\phi$, el momento del cono de helado con respecto al plano xy es :

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int\int\int z \, dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2a\cos\phi} \rho^3 \cos\phi \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= 4a^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \cos^5\phi \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= 8\pi a^4\left[-\frac{1}{6}\cos^6\phi\right]\Bigg|_0^{\pi/6} \\ &= \frac{37\pi a^4}{48} \end{aligned}$$

En consecuencia, la coordenada z del centroide es $\overline{z} = M_{xy}/V = \frac{37a}{28}$

3.4 Ejercicios de integración múltiple (Capítulos I, II y III)

1. Para la función:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
calcular la integral iterada
$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx\, dy$$

2. Dada la suma de las integrales iteradas,
$$\int_{-2}^{0} \int_0^{(x+2)^2} \sqrt{y}\, dydx + \int_0^2 \int_0^{(x-2)^2} \sqrt{y}\, dydx$$
   (a) Haga un dibujo que muestre la región de integración R y escriba la expresión de la integral iterada correspondiente, si se intercambiara el orden de integración.
   (b) Calcule la(s) integral(es)

3. Considerar la región R acotada por las dos funciones $y = (x+2)^2$ e $y = (x-2)^2$ sobre el eje x. Calcular la integral doble
$$\int_R \int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dA$$

4. Considere la función $f(x,y) = xe^{y^{3/2}}$ definida sobre la región R acotada por las ecuaciones: $y = x^4$, $y = 16$ y $x = 0$.
   (a) Exprese la integral doble $\int\int_R f(x,y)dA$ como una integral iterada de dos maneras distintas (esto es, considerando R como una región de tipo I y de tipo II).
   (b) Calcule la integral doble $\int\int_R f(x,y)dA$.

5. Calcule la integral doble
$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2-y^2)^{3/2}\, dy\, dx$$

6. Calcular la integral triple
$$\int\int_{\Omega}\int \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$$
donde Ω es el sólido sobre el cono $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7. Calcule la integral doble
$$\int\int_{R} xy\,dA$$
donde R es la región limitada por arriba por la curva $x + y = 2$, y por abajo por la curva $x^2 + y^2 = 2y$

8. Calcular la integral doble
$$\int\int_{R} \sin\theta\,dA$$
donde R es la región en el primer cuadrante situada al interior de la circunferencia $r = 4\cos\theta$ y al exterior de la circunferencia $r = 2$. (Indicación: dibuje la región)

9. Dibuje la región de integración, intercambie el orden de integración y evalúe la integral
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} \cos\theta\,dr\,d\theta$$

10. Calcular la integral triple
$$\int\int_{\Omega}\int z^2\,\sin(x^2+y^2)\,dV$$
donde $\Omega = \{(x, y, z) \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 1\}$.

11. Calcule el volumen del sólido en el primer octante acotado por las gráficas de las ecuaciones
$$z = x^2 + y^2,\ y = 4 - x^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

12. Considere el sólido S acotado por las gráficas del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y del plano $z = 5$.
    (a) Calcule el volumen del sólido S.
    (b) Si el sólido S es homogéneo de densidad constante 1 calcule su centro de masa (es decir, su *centroide*).

13. Considere el sólido Q en el primer octante dentro de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$, y bajo el paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$.
    (a) Exprese el volumen del sólido Q como una (o más) integral(es) iterada(s) doble(s) en coordenadas rectangulares.
    (b) Exprese el volumen del sólido Q como una (o más) integral(es) iterada(s) triple(s) en coordenadas cilíndricas.
    (c) Calcule el volumen del sólido Q.

14. Calcule el volumen del sólido acotado por los cuatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, y $3x + 4y = 10$, y la superficie $z = x^2 + y^2$.

15. Calcular el volumen del sólido acotado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.
    (a) Dibuje el sólido
    (b) Calcule el volumen usando una integral doble.

16. Encuentre el volumen del sólido acotado por las superficies $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $x^2+y^2 = 1/4$.

17. Calcule el volumen del sólido acotado por los cuatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, y $3x + 4y = 10$, y la superficie $z = x^2 + y^2$.

18. Calcular el volumen bajo la superficie $z = \ln(x^2 + y^2)$ y sobre la región R en el primer cuadrante entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$

19. (a) Calcular la integral doble
    $$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 \, dx \, dy$$
    (b) Calcule el centro de masa de la lámina de densidad constante 2, acotada por las curvas $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

20. (a) Calcular la integral doble
    $$\int \int_R \cos(1 + x^2 + y^2) \, dA$$
    donde la región R es la parte del anillo entre los círculos $x^2+y^2 = 9$ y $x^2+y^2 = 1$, en el primer cuadrante.

(b) Calcule el centro de masa de esta región plana R suponiendo que la densidad en el punto (x, y) es la distancia del punto al origen.

21. Encontrar el **centro de masa** de la lámina correspondiente a la región parabólica $0 \leq y \leq 4 - x^2$, donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre (x, y) y el eje x.

22. Calcular el centro de masa de la lámina cuya forma está dada por la función $y = \sin x$, donde $0 \leq x \leq \pi$ y cuya densidad en el punto P es la distancia de P al eje y.

23. Calcular el momento de inercia de la región indicada:

    (a) R es la región bajo la curva $y = \sin x$ para $0 \leq x \leq \pi$ **con respecto al eje x**.

    (b) Un círculo de radio r **con respecto a su tangente**.

24. (a) Encuentre el volumen del sólido limitado por las superficies dadas.
$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad z = x^2 + y^2$$
.

    (b) Hallar el área de cada una de las dos partes en que la parábola $y = 5x^2/8$ corta al círculo $x^2 + y^2 = 9/4$.

25. Usando integrales triples, calcule el volumen del sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2 = 16$, el plano xy y por el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 4$.

26. Calcular la integral triple
$$\int\int_{\Omega}\int z^2 \, \sin(x^2 + y^2) \, dV$$
donde $\Omega = \{(x, y, z) \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \, 0 \leq z \leq 2\}$.

27. Calcular la integral triple
$$\int\int_{\Omega}\int e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$$
donde Ω es la esfera de radio 1 centrada en el origen.

28. Pruebe que
$$\int_0^x \left[\int_0^t F(u) \, du\right] dt = \int_0^x (x - u)F(u) \, du$$

29. Dada la integral
$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{0.5\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$
Dibujar la región de integración R implícita y escribir la integral como una o más integrales iteradas intercambiando el orden de integración.

30. Calcular la integral $\displaystyle\int\int_R \ln(1+x^2+y^2)\,dA$, donde R es la parte del anillo limitado por los círculos $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$ ubicada en el primer cuadrante.

31. Calcular la integral $\displaystyle\int\int\int_D f(x,y,z)\,dV$ donde $f(x,y,z)=(x+2y+3z)^2$ y D es la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por los planos coordenados y el plano $x+y+z=1$.

32. Calcular la integral triple de $f(x,y,z)=1+(x^2+y^2)^2$ sobre la región D limitada por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z=2$.

33. Calcule el volumen del sólido en el primer octante acotado por las gráficas de las ecuaciones
$$z=x^2+y^2,\ y=4-x^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$$

34. Evalúe la integral cambiando a coordenadas esféricas.
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$$

35. Calcule, usando integrales triples, el volumen de la región acotada por las superficies $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2=1/4$.

Capítulo 4

Calculo Vectorial

4.1 Curvas Paramétricas

En este capitulo estudiaremos curvas en el plano, que pueden ser interpretadas como la trayectoria de una particula a lo largo del tiempo. Entonces, si I es un intervalo de tiempo a medida que t recorre I la particula dibuja una trayectoria en el plano que llamamos curva paramétrica, ya que depende del parametro t.

> Formalmente, una curva paramétrica es una función de la forma $\lambda(t) = (f(t), g(t))$, donde t está en el intervalo I. Tanto $f(t)$ como $g(t)$ son continuas y derivables (en casi todos los puntos)

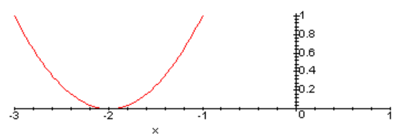
Ejemplo de curva

Consideremos la función $\lambda(t) = (t-2, t^2)$ definida en el intervalo $[-1, 1]$. Pongamos $x = t-2$ e $y = t^2$. Para gráficar la curva buscamos la relación existente entre x e y. De lo anterior tenemos $t = x + 2$ y reemplazando en la definición de y obtenemos:

$$y = (x + 2)^2$$

Esto significa que los puntos del plano de la forma $(t-2, t^2)$ satisfacen la ecuación $y = (x+2)^2$ y por lo tanto la gráfica de estos puntos corresponde a una parte de la gráfica de esta ecuación.

Además, si $t = -1$ entonces $x = -3$ e $y = 1$. Asimismo, si $t = 1$ se tiene que $x = -1$ e $y = 1$. Así, la imagen o gráfico (o trayectoria) de esta curva es:



A medida que t recorre el intervalo $[-1, 1]$ de izquierda a derecha, la curva también se dibuja de izquierda a derecha, donde $\lambda(-1)$ es el *punto inicial* y $\lambda(1)$ es el *punto final*.

Ejercicios: Para practicar estas ideas, dibujemos las curvas paramétricas siguientes.

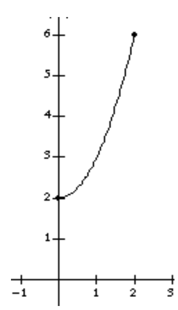
1. $\lambda(t) = (t, t^2 + 2),\ t \in [0, 2]$

   Punto inicial $\lambda(0) = (0, 2)$

   Punto inicial $\lambda(2) = (2, 6)$

   Relación entre x e y: $y = x^2 + 2$.

   Gráfico:



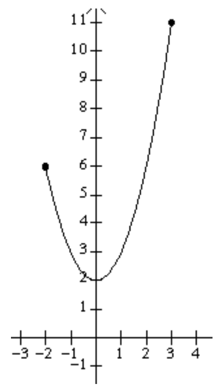
2. $\lambda(t) = (t, t^2 + 2),\ t \in [-2, 3]$

   Punto inicial $\lambda(-2) = (-2, 6)$

   Punto inicial $\lambda(3) = (3, 11)$

Relación entre x e y: $y = x^2 + 2$.

Gráfico:



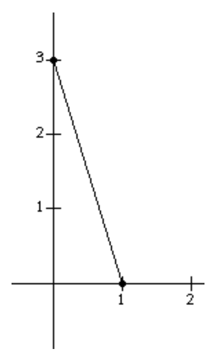
3. $\lambda(t) = (t, 3 - 3t),\ t \in [0, 1]$

   Punto inicial $\lambda(0) = (0, 3)$

   Punto inicial $\lambda(1) = (1, 0)$

   Relación entre x e y: $y = 3 - 3x$.

   Gráfico:

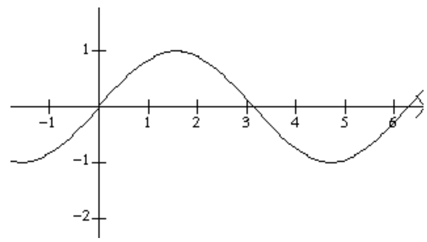


En general, el gráfico de toda función continua definida sobre un intervalo es una curva paramétrica.
Si $y = f(x)$, la curva correspondiente está dada por:

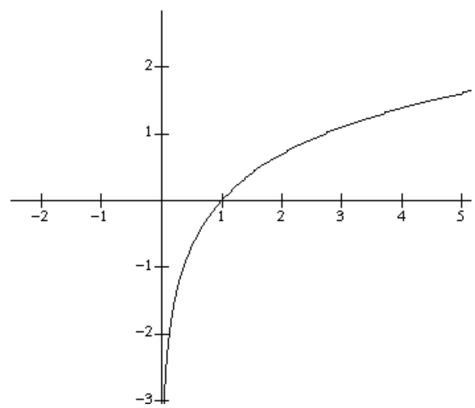
$$\lambda(t) = (t, f(t)), \quad t \in I$$

Ejemplos:

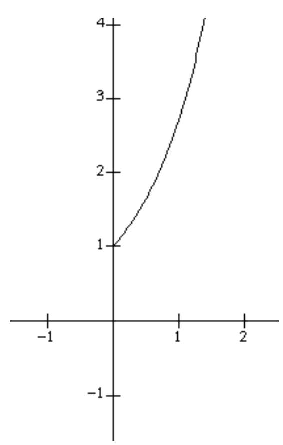
$\lambda(t) = (t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$



$\lambda(t) = (t, \ln t),\ t \in (0, \infty)$



$\lambda(t) = (t, e^t),\ t \in (0, \infty)$



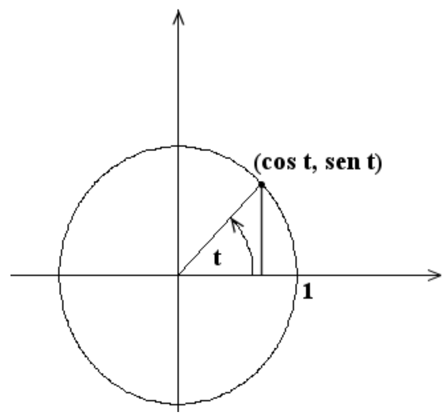
Algunas curvas clasicas vistas como curvas paramétricas.

- Círculo

- Elipse
- Recta o segmento de recta

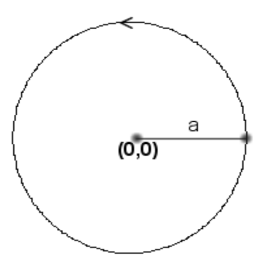
El círculo como curva paramétrica

Círculo unitario (radio 1 centrado en (0,0))



$$\lambda(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in I$$

La curva $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ tiene como imagen o trayectoria el círculo unitario.



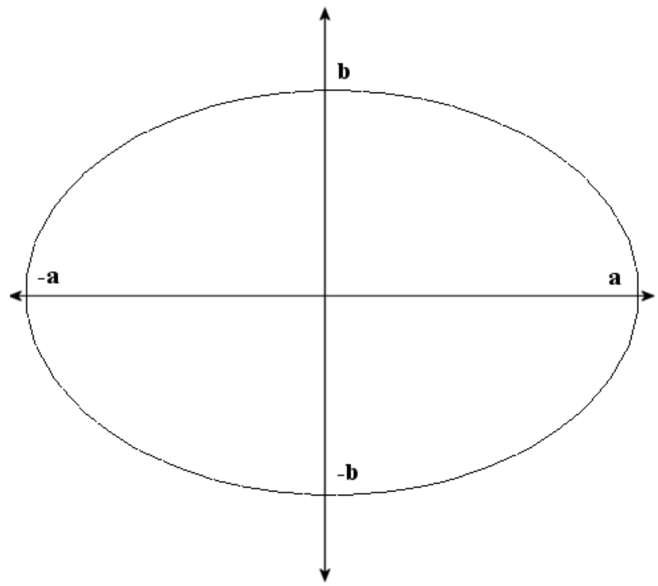
- En un círculo centrado en el origen de radio a corresponde a la curva siguiente:

$$\lambda(t) = (a\cos t, a\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- En general el círculo de radio a centrado en el punto (h, k) esta representado por:

$$\lambda(t) = (a\cos t + h, k + a\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



donde:

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \qquad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t$$
$$x^2 = a^2 \cos^2 t \qquad y^2 = b^2 \sin^2 t$$
$$x = a \cos t \qquad y = b \sin t$$

Entonces la elipse con ecuación cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se puede representar paramétricamente por:

$$\lambda(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

Ejercicios : Parametrización de algunas curvas clasicas

1. Gráfico de una función de una variable.

$$\lambda(t) = (t, f(t)) \ , t \in I$$

2. Gráfico de un círculo.

$$\lambda(t) = (h + a\cos t, k + a\sin t) \ , t \in \ [0, 2\pi]$$

3. Gráfico de una elipse.

$$\lambda(t) = (h + a\cos t, k + b\sin t) \ , t \in \ [0, 2\pi]$$

4. Gráfica de una recta y de un segmento (Parametrización de una recta).

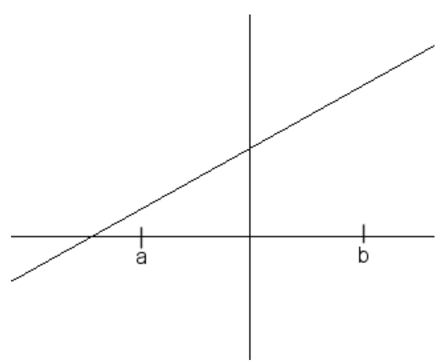
   (a) no vertical

   (b) vertical

   En el caso a) la recta es el gráfico de una función $y = mx + b$ y por lo tanto $\lambda(t) = (t, mt + b)$ $t \in \mathbb{R}$

   Si se quiere parametrizar un segmento de esta recta basta con tomar t en un subintervalo apropiado

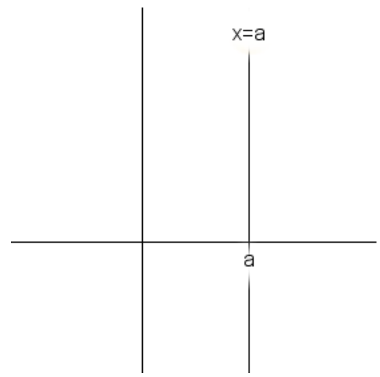
   $t \in [a, b]$



   En el caso b) las rectas verticales tienen como ecuación

$$\lambda(t) = (a, t) \ , t \in \mathbb{R}$$

   Para un segmento acotamos t en el intervalo $[a, b]$



Observación: Las curvas tienen infinitas parametrizaciones

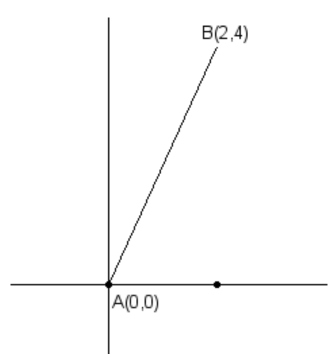
Otra manera de parametrizar un segmento (y también una recta)

Sean A y B dos puntos en el plano, la curva.

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= (1-t)A + tB \qquad \in [0,1] \\
\lambda(0) &= A \\
\lambda(1) &= B \\
\lambda(1/2) &= \frac{A+B}{2} \ \textit{punto medio del segmento } \overline{AB}
\end{aligned}$$

En general el gráfico o trayectoria de $\lambda(t)$ es el segmento entre A y B.

Ejemplos:



Parametrizar este segmento de dos formas distintas

1. Como el gráfico de una función

   Solución: La ecuación para la recta dada

$$m = \frac{4-0}{2-0} = 2$$

   punto (x_0, y_0) y pendiente

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y &= 2x \end{aligned}$$

   Por lo tanto la parametrización del segmento es:

$$\lambda(t) = (t, 2t) \; t \in [0, 2]$$

2. Con el método anterior que se usa para cualquier segmento

   Solución: Con este método

   Para cualquier segmento entre $[0, 1]$

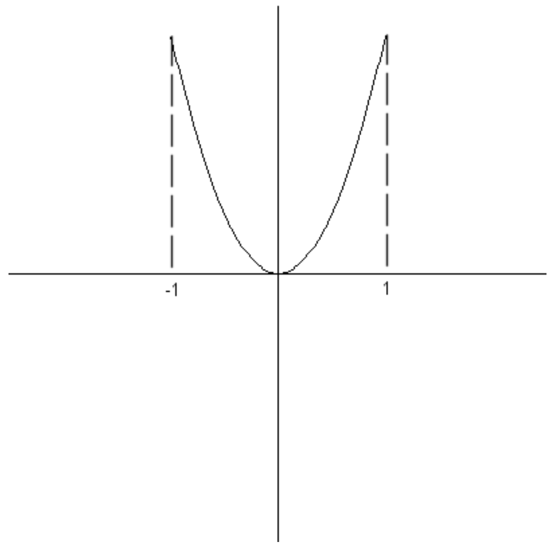
$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (1-t)A + tB, \quad t \in [0,1] \\ \lambda(t) &= (1-t)(0,0) + (2,4)t \\ \lambda(t) &= (0,0) + (2t, 4t) \\ \lambda(t) &= (2t, 4t) \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

   Si queremos conocer la parametrización del segmento $(2, 0)$ al $(2, 4)$.

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (1-t)(2,0) + t(2,4) \\ \lambda(t) &= (2-2t, 0) + (2t, 4t)) \\ \lambda(t) &= (2, 4t) \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

Consideremos el trozo de la parábola

$$y = x^2 \qquad -1 \leq x \leq 1$$



Las parametrizaciones que conocemos:

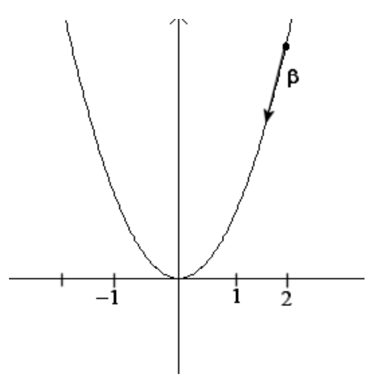
$$\lambda(t) = (t, t^2) \quad t \in [-1, 1]$$

Consideremos las siguientes curvas paramétricas

$$\beta(t) = ((1 - t), (1 - t^2)) \quad t \in [-1, 1]$$

$$\gamma(t) = (t^3, t^6) \quad t \in [-1, 1]$$

Dado que tanto β como γ cumplen con la condición que la segunda componente es el cuadrado de la primera, y que por lo tanto el gráfico de ambas está sobre la parábola (coincide con la parábola $y = x^2$)



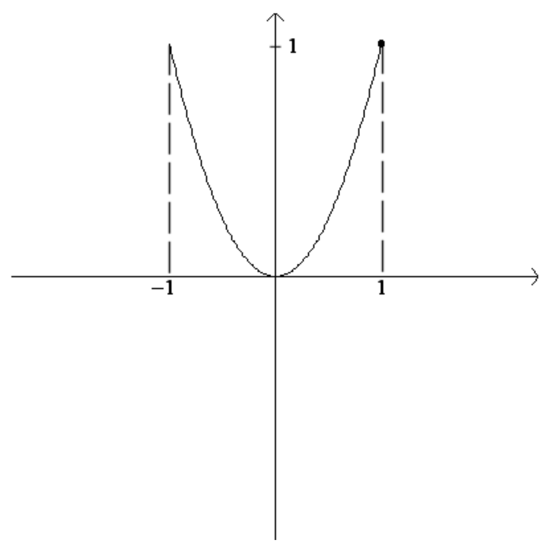
Punto inicial de $\beta:\ \beta(-1) = (2,4)$

Punto final de $\beta:\ \beta(1) = (0,0)$

Si consideramos

$$\beta(t) = ((1-t),(1-t^2)) \quad t \in [0,2]$$

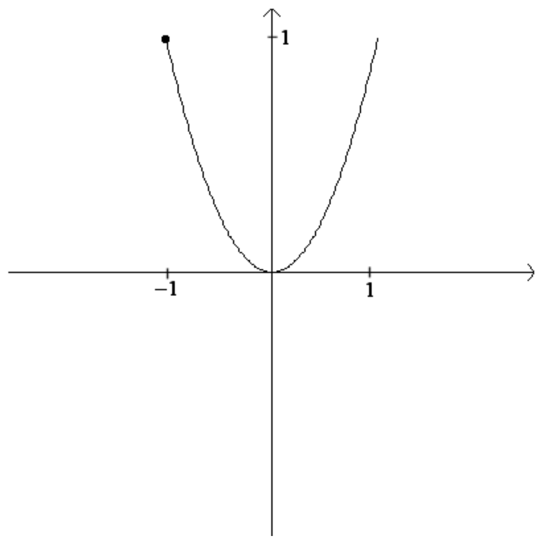
Su gráfica será



En el caso de γ

Punto inicial de $\gamma:\ \gamma(-1) = (-1,1)$

Punto final de $\gamma:\ \gamma(1) = (1,1)$

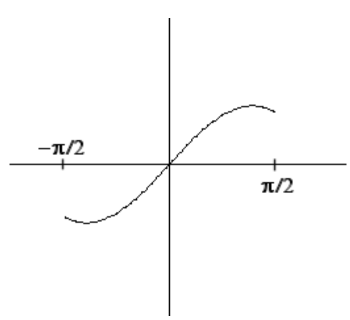


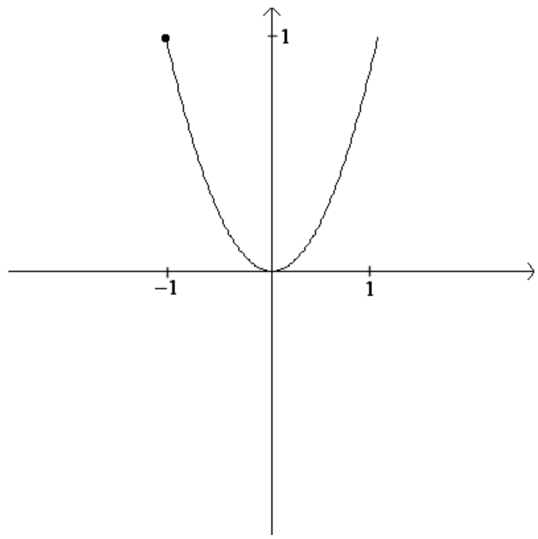
Otra parametrización de esta parábola puede ser

$$\alpha(t) = (\sin t, \sin^2 t) \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Punto inicial de α : $\alpha(-\pi/2) = (-1, 1)$

Punto final de α : $\alpha(\pi/2) = (1, 1)$



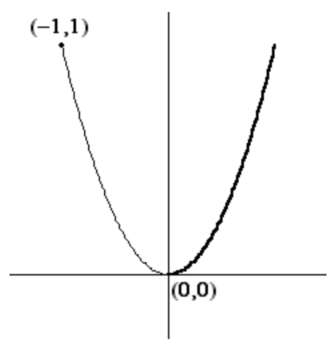


Cual es el gráfico de la curva

$$\omega(t) = (\sin t, \sin^2 t)\,, \quad t \in [-\pi/2, \pi]$$

Punto inicial de ω : $\omega(-\pi/2) = (-1, 1)$

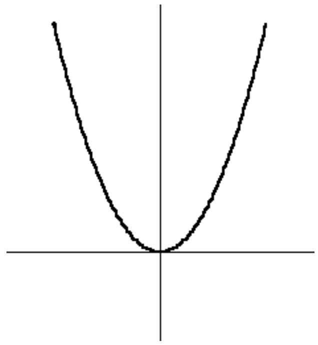
Punto final de ω : $\omega(\pi) = (0, 0)$



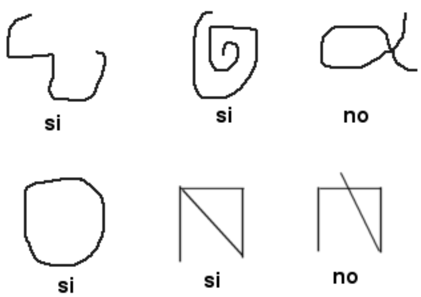
$$\varepsilon(t) = (\sin t, \sin^2 t)\,, \quad t \in [-\pi/2, 3\pi/2]$$

Punto inicial de $\varepsilon(t)$: $\varepsilon(-\pi/2) = (-1, 1)$

Punto final de ε : $\varepsilon(3\pi/2) = (-1, 1)$



Descripción: Una curva paramétrica se llama simple, si esta no se cruza a si misma.



En otras palabras la curva $\lambda(t)$ es simple si es <u>inyectiva</u> en el intervalo abierto de su definición.

$$\lambda(t_1) \neq \lambda(t_2) \text{ no puede ser el mismo número}$$

Una curva definida en el intervalo $[a, b]$ se llama cerrada si:

$$\lambda(a) = \lambda(b)$$

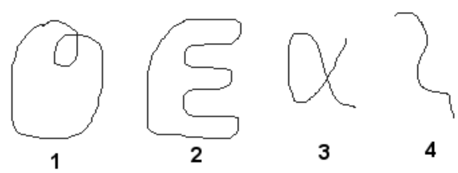
Es decir punto inicial = punto final.

Hemos vistos que una curva puede tener infinitas parametrizaciones.

Por ejemplo: la parábola

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (t, t^2), \quad t \in [-1, 1] \\ \lambda(t) &= (\sin t, \sin^2 t), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2] \end{aligned}$$

y definimos el concepto de curva simple, curva cerrada y curva cerrada simple. Ver que en este caso, solo los extremos de curva se tocan.



1. Cerrada pero no simple
2. Cerrada y simple
3. No es simple ni cerrada
4. Es simple, pero no cerrada

4.2 Reparametrizaciones

Sea $\lambda : I \to \mathbb{R}^2$ una curva paramétrica y sea $\phi : J \to I$ una función continua creciente o decreciente en el intervalo I. Entonces la función $\beta(t) = \lambda(\lambda(\phi(t)))$ se llama una reparametrización de λ.

$$J \to^{\phi} I \to^{\lambda} \mathbb{R}^2$$

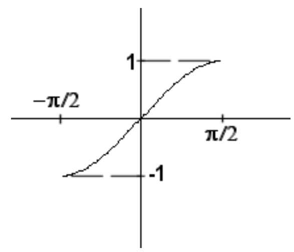
$$\beta = \lambda \circ \phi$$

Esta reparametrización β "dibuja"la misma curva.

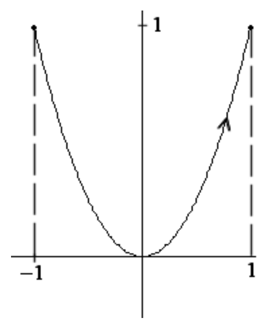
- Si $\phi'(t) > 0$, β tiene la misma orientación que λ
- Si $\phi'(t) < 0$, β tiene la misma orientación opuesta λ

Ejemplo:

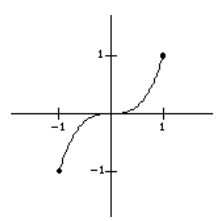
1. $\lambda(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 1]$
   Sea $\phi(t) = \sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$
   luego, $\phi'(t) = \cos t \, > 0 \, en \, (-\pi/2, \pi/2)$
   entonces: $\phi : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$



$$\beta(t) = \lambda(\phi(t)) = \lambda(\sin t) = (\sin t, \sin^2 t) \text{ , } t \in [-\pi/2, \pi/2]$$



2. $\gamma(t) = (t^3, t^6)$, $t \in [-1, 1]$ es una reparametrización de λ con $\phi(t) = t^3$, $t \in [-1, 1]$



$$\phi : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$$
$$\phi'(t) = 3t^2 > 0, \text{ } excepto \text{ } en \, 0$$

4.2.1 Usando una reparametrización para cambiar el intervalo de definición de una curva

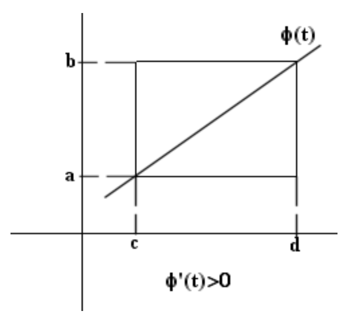
Supongamos λ está definida sobre el intervalo $[a, b]$ y queremos redefinirla sobre el intervalo $[c, d]$. Mostraremos un método para cambiar el intervalo de definición de la curva y para cambiar su orientación.

Método

Si queremos cambiar de intervalo, pero no de orientación, consideremos el rectángulo en el plano dado por estos dos intervalos, a saber:

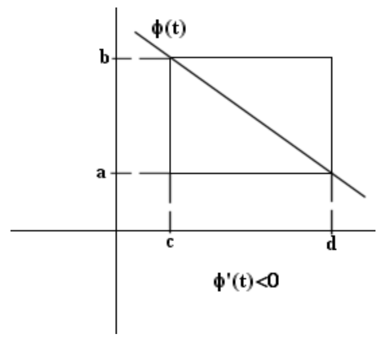
$$R = \{(x, y) \mid c \leq x \leq d,\ a \leq y \leq b\}$$

Ahora, construyamos la recta de pendiente positiva que pasa por los dos vértices opuestos como se ve en la figura. Llamemos a esta función ϕ.



Entonces $\phi : [c, d] \to [a, b]$ es continua, derivable y su derivada nunca es cero, de hecho se tiene $\phi'(t) > 0$. Por lo tanto, la función $\beta(t) = \lambda(\phi(t))$ es una reparametrización de la curva λ y que tiene la misma orientación.

Si queremos cambiar de intervalo y de orientación, consideremos el mismo rectángulo en el plano. Ahora, construyamos la recta de pendiente negativa que pasa por los dos vértices opuestos como se ve en la figura. Llamemos a esta función ϕ.

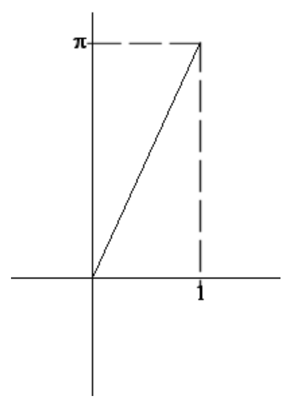


Entonces $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es continua, derivable y su derivada nunca es cero, de hecho se tiene $\phi'(t) < 0$. Por lo tanto, la función $\beta(t) = \lambda(\phi(t))$ es una reparametrización de la curva λ y que revierte la orientación.

Ejemplos:

1. $\lambda(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, \pi]$

   Reparametricemos sobre el intervalo $[0, 1]$



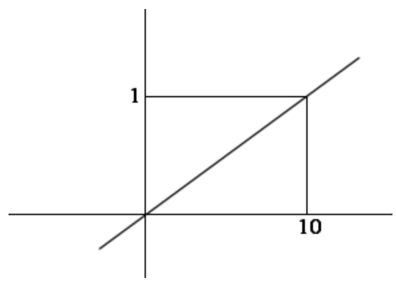
$$m = \pi \qquad (y - 0) = \pi(x - 0)$$
$$\eta = \pi x$$
$$\phi(t) = \pi t \quad , t \in [0, 1]$$
$$\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\beta(t) = \lambda(\phi(t)) = \lambda(\pi t) = (\cos \pi t, \sin \pi t),\ t \in [0, 1]$$

2. consideremos el segmento que parte en $(1,2)$ a $(2,5)$ la parametrización "clásica" $\lambda(t) = (1-t)A + tB,\ t \in [0,1]$ permite dibujar el segmento en 1 segundo.

$$\lambda(t) = (1+t, 2+3t)\ , t \in [0,1]$$

Queremos ver en **camara lenta** este trazado, que demora 10 segundos en dibujar.$[0,10] \rightarrow [0,1]$



$$m = \frac{1}{10} \qquad \eta = \frac{1}{10}x$$
$$\phi(t) = \frac{1}{10}t$$
$$\beta(t) = \lambda(\phi(t)) = \lambda\left(\frac{t}{10}\right) = \left(1 + \frac{t}{10}, 2 + \frac{3t}{10}\right), \ t \in [0,10]$$
$$\beta(5) = (1.5, 3.5) \qquad \beta(10) = (2,5)$$

Curva cerrada y simple
Una curva se llama cerrada si el punto inicial coincide con el punto final.

$$\lambda\ :\ [a,b]\ \rightarrow\ \mathbb{R}^2$$
$$\lambda(a) = \lambda(b)$$

Una curva se llama simple si no tiene auto intersección, es decir:

$$\lambda(x_1) \neq \lambda(x_2) \qquad \text{si}\ \ x_1 \neq x_2\, y\ \text{ con } x_1,\ x_2\ \in]a,b[$$

ó bien si λ es inyectiva ó 1-1 en el intervalo abierto $]a,b[$

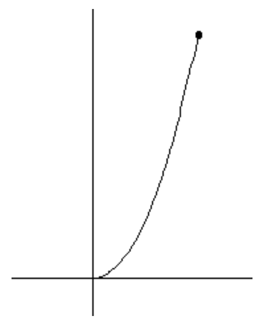
Ejemplos

1. $\lambda(t) = (\sin t, \sin^2 t)\, ,\ t \in [0,\pi]$

2. $\lambda(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $t \in [-2, 2]$

Solución:

1. cerrada, no simple



- $\lambda(0) = (0, 0)$
- $\lambda(\pi/6) = (1/2, 1/4)$
- $\lambda(\pi/4) = (0.7, 0.49)$
- $\lambda(\pi/3) = (0.86, 0.75)$
- $\lambda(\pi/2) = (1, 1)$
- $\lambda(2\pi/3) = (0.86, 0.75)$
- $\lambda(3\pi/4) = (0.7, 0.49)$
- $\lambda(5\pi/6) = (1/2, 1/4)$
- $\lambda(\pi) = (0, 0)$

2.

$$\begin{aligned} \lambda(-2) &= (0,0) \\ \lambda(2) &= (0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(a) &= (a^3 - 4a, a^2 - 4) \\ \lambda(b) &= (b^2 - 4b, b^2 - 4) \end{aligned}$$

entonces $\lambda(a) = \lambda(b)$

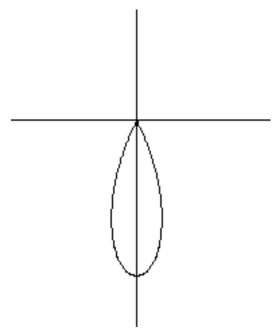
$$\begin{aligned} a^3 - 4a &= b^2 - 4b \ (1) \\ a^2 - 4 &= b^2 - 4 \ \ (2) \end{aligned}$$

entonces de (2) $a^2 = b^2 \;\Rightarrow\; a = \pm b$

Si $a = -b$

$$\begin{aligned} -b^3 + 4b &= b^2 - 4b \\ 4b &= b^3 \; si\, b \neq 0 \\ 4 &= b^2 \\ b &= \pm 2 \end{aligned}$$

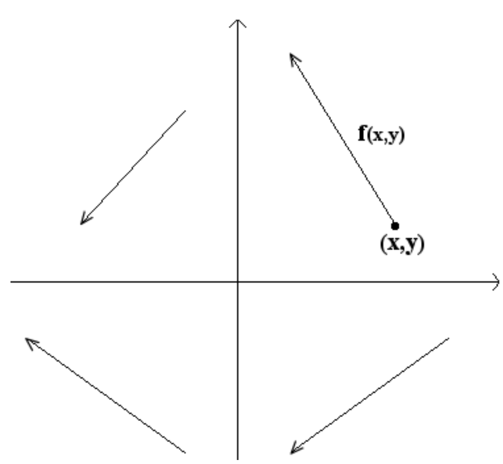
$\Rightarrow$ es inyectiva $(-2, 2)$, por lo tanto es simple.



4.3 Campos Vectoriales bidimensionales

Sea D un conjunto en $\mathbb{R}^2$ (una región plana). Un *campo vectorial* en $\mathbb{R}^2$ es una función F que asigna a cada punto (x, y) perteneciente a D un vector bidimensional $F(x, y)$.

Es decir, $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.



Ejemplos:

1. $F(x, y) = (x + y, y)$

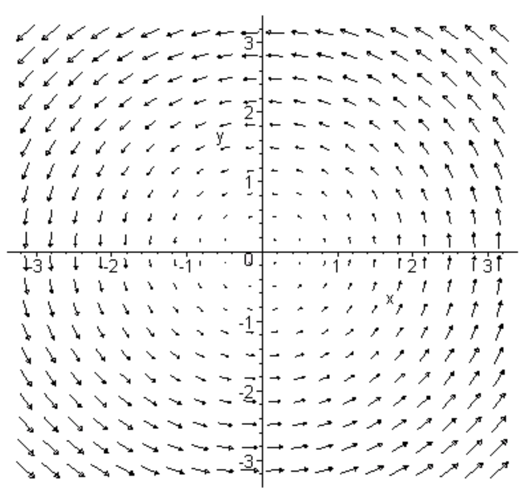
2. $F(x, y) = (e^{xy}, \ln(x + y))$

3. $F(x, y) = (xy^2, x - y^2)$

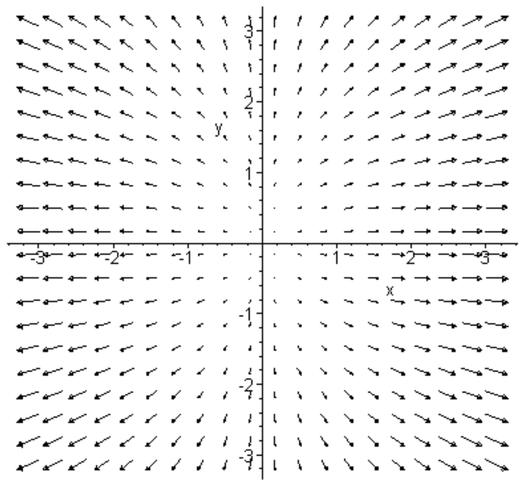
4. $F(x, y) = (x + \sin y, \cos(xy))$

El nombre de *Campo Vectorial* proviene de la manera de representar en forma gráfica estas funciones. Para ello se elige una grilla de puntos del plano (o más específicamente del dominio D) y sobre cada punto (x, y) de esta grilla se dibuja el vector correspondiente a $F(x, y)$ (eventualmente adaptando su longitud). Veamos los siguientes ejemplos que han sido producidos por el software *Maple*.

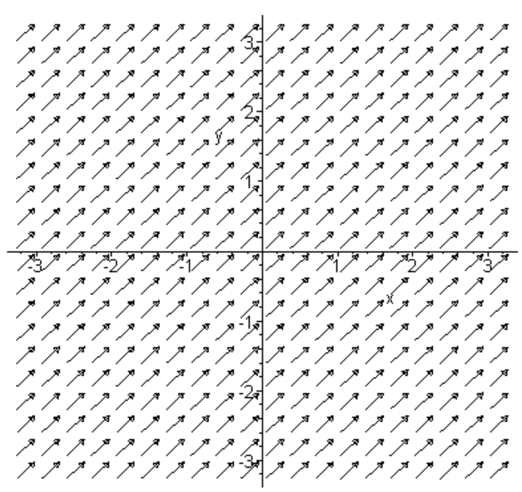
1. $F(x, y) = (-y, x)$ (campo rotacional)



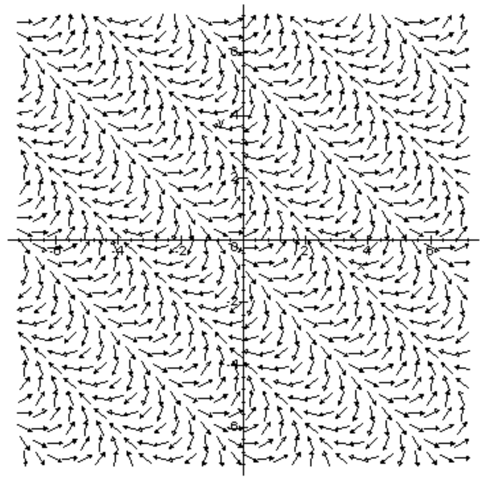
2. $F(x, y) = (2x, y)$



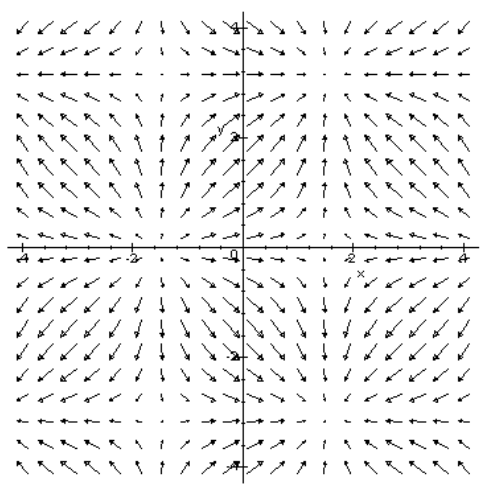
3. $F(x, y) = (1, 1)$ (campo vectorial constante)



4. $F(x, y) = (\cos(x + y), \sin(x + y))$



5. $F(x, y) = (\cos x, \sin y)$



4.4 Integrales de Línea

Sea $F(x, y)$ un campo vectorial y λ una curva paramétrica definida en $[a, b]$.

Se define la integral de línea de F con respecto a la curva λ como

$$\int_\lambda F\, d\lambda = \int_a^b f(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)\, dt$$

Si $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ entonces $\lambda'(t) = (x'(t), y'(t))$. Asimismo, $F(\lambda(t)) = F(x(t), y(t))$. Dado que $F(\lambda(t))$ y $\lambda'(t)$ son vectores, entonces su producto es el producto interno (o producto punto)

$$(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2$$

Ejemplo Calcular la integral de línea en los siguientes casos:

1. $F(x,y) = (x+y, y) \qquad \lambda(t) = (t, t^2),\ t \in [-1, 2]$

$$\int_\lambda F\, d\lambda = \int_{-1}^2 F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)\, d\lambda$$

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= (1, 2t) \\ F(\lambda(t)) &= F(t, t^2) = (t + t^2, t^2) \\ F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) &= (t+t^2, t^2) \cdot (1, 2t) = t + t^2 + 2t^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$\int_\lambda F d\lambda = \int_{-1}^2 (t + t^2 + 2t^3)\, dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^4}{4}\right]\Bigg|_{-1}^2 = \frac{121}{20} = 6.05$$

2. $F(x,y) = (x, y) \qquad \lambda(t) = (2\cos t, 2\sin t),\ t \in [0, \pi]$

$$\int_\lambda F\, d\lambda = \int_0^\pi f(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)\, d\lambda$$

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= (-2\sin t, 2\cos t) \\ F(\lambda(t)) &= F(2\cos t, 2\sin t) = (2\cos t, 2\sin t) \\ F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) &= (2\cos t, 2\sin t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t) = 4\cos t \sin t - 4\cos t \sin t = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$\int_\lambda F\,d\lambda = \int_0^\pi 0\,dt = 0$$

3. $\lambda : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$ y $F(x, y) = (y, -x)$

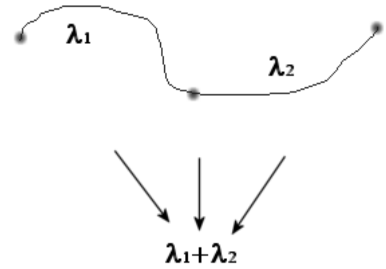
$$\begin{aligned} \int_\lambda F \cdot d\lambda &= \int_0^{2\pi} F(t - \sin t, 1 - \cos t) \cdot (1 - \cos t, \sin t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t, \sin t - t) \cdot (1 - \cos t, \sin t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos t - t \sin t)\,dt = 6\pi \end{aligned}$$

4. $\lambda : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$ y $F(x, y) = (-y, x)$

$$\begin{aligned} \int_\lambda F \cdot d\lambda &= \int_0^{\pi} F(\cos^3 t, \sin^3 t) \cdot (-3\cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi} (-\sin^3 t, \cos^3 t) \cdot (-3\cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi} 3 \sin^2 t \cos^2 t\,dt = \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 2t\,dt = \frac{3}{8}\int_0^{\pi} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

Propiedades de las integrales de línea

Las curvas se pueden subdividir en partes o bien se pueden *añadir*, como se ilustra en la figura.



Esta idea de añadir la llamamos *sumar*. Por cierto, para sumar ó unir 2 curvas el punto final de la primera debe coincidir con el punto inicial de la segunda. Al igual que para las integrales de una variable definidas sobre un intervalo en $\mathbb{R}$, las integrales de línea cumplen con la siguiente propiedad:

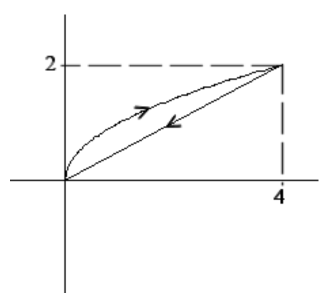
$$\int_{\lambda_1+\lambda_2} F\,d\lambda = \int_{\lambda_1} F\,d\lambda + \int_{\lambda_2} F\,d\lambda$$

Por otro lado, si denotamos por $-\lambda$ a la curva λ orientada en sentido contrario, se tiene:

$$\int_{-\lambda} F\,d\lambda = -\int_{\lambda} F\,d\lambda$$

Ejemplo:

Calcular la integral del campo vectorial $f(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$, sobre la curva definida por la frontera orientada negativamente de la región acotada por la gráfica de $y=\sqrt{x}$ y de la recta al punto $(4,2)$ del origen, con la orientación dada en la figura.



$$\int_{\lambda} F\,d\lambda = \int_{\lambda_1} F\,d\lambda + \int_{\lambda_2} F\,d\lambda$$

Solución:

Se necesita parametrizar las dos curvas que componen la curva de la figura. Llamamos λ_1 al segmento de recta y λ_2 al trozo de la gráfica de $y=\sqrt{x}$.

$\lambda_1 =$ segmento de recta de $(4,2)$ a $(0,0)$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= (1-t)(4,2)+t(0,0)\\
\lambda_1(t) &= (4-4t,2-2t)\ ,t\ \in[0,1]
\end{aligned}$$

$\lambda_2 =$ trozo gráfico $y=\sqrt{x}$

$$\lambda_2(t)=(t,\sqrt{t})\ ,t\ \in[0,4]$$

Calculemos:

$$\int_{\lambda_1} F\,d\lambda=\int_0^1 F(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)\,d\lambda$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1' &= (-4,-2)\\
F(\lambda_1(t)) &= F(4-4t,2-2t)=\left[(4-4t)^2+(2-2t)^2,2(4-4t)(2-2t)\right]\\
F(\lambda_1(t))\cdot\lambda_1'(t) &= -4\left[(4-4t)^2+(2-2t)^2\right]-4[(4-4t)(2-2t)]
\end{aligned}$$

entonces:

$$\int_0^1\left[-4\left[(4-4t)^2+(2-2t)^2\right]-4[(4-4t)(2-2t)]\right]\,dt=\frac{-112}{3}$$

Calculemos:

$$\int_{\lambda_2} F\,d\lambda=\int_0^4 F(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)\,d\lambda$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2' &= (1,1/2\sqrt{t})\\
F(\lambda_2(t)) &= F(t,\sqrt{t})=(t^2+t,2t\sqrt{t})\\
F(\lambda_2(t))\cdot\lambda_2'(t) &= t+t^2+t=2t+t^2
\end{aligned}$$

entonces:

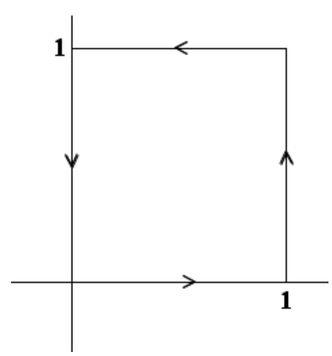
$$\int_0^4 (2t + t^2)\, dt = \frac{112}{3}$$

Por lo tanto, la solución es:

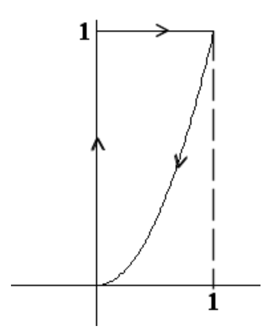
$$\int_\lambda F\, d\lambda = \int_{\lambda_1} F\, d\lambda + \int_{\lambda_2} F\, d\lambda = 0$$

Ejercicios:

1. Calcular $\displaystyle\int_\lambda f\, d\lambda$, donde $F(x, y) = (-y, x)$



2. Calcular $\displaystyle\int_\lambda F\, d\lambda$, donde $F(x, y) = (-y, x)$



4.5 Campos vectoriales conservativos

Las dos componentes de un campo vectorial, que llamamos M y N, son funciones reales de las dos variables x e y:

$$F(x,y) = (M,N)$$

Por ejemplo

1. Si $F(x,y) = (x+y, y)$ entonces $M = x+y$; $N = y$
2. Si $F(x,y) = (e^{xy}, \ln(x+y))$ entonces $M = e^{xy}$; $N = \ln(x+y)$
3. Si $F(x,y) = (xy^2, x-y^2)$ entonces $M = xy^2$; $N = x - y^2$
4. Si $F(x,y) = (x+\sin y, \cos(xy))$ entonces $M = x + \sin y$; $N = \cos(xy)$

Si $f(x,y)$ es una función real su *gradiente* es un campo vectorial.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ejemplo:

1. $f(x,y) = xy^2 \rightarrow$ función real
   $\nabla f = (y^2, 2xy) \rightarrow$ gradiente en un campo vectorial
2. $f(x,y) = e^{xy} \rightarrow$ función real
   $\nabla f = (ye^{xy}, xe^{xy}) \rightarrow$ gradiente en un campo vectorial
3. $f(x,y) = x^2 + y^2 \rightarrow$ función real
   $\nabla f = (2x, 2y) \rightarrow$ gradiente en un campo vectorial

Un campo vectorial F se llama conservativo si es el gradiente de alguna función f. Es decir, si

$$F(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

A partir de lo cálculos anteriores, los siguientes son campos conservativos:

1. $F(x,y) = (y^2, 2xy)$
2. $F(x,y) = (e^x y, e^x)$
3. $F(x,y) = (2x, 2y)$

Entonces un campo de la forma $F = (M,N)$ es conservativo si existe una función real f tal que:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

La función f se denomina *funcion potencial* del campo F.

Ejemplos adicionales:

1. $F(x,y) = (2xy, x^2)$
   $f(x,y) = x^2 y$

   es conservativo ya que el gradiente coincide con el campo vectorial;

   $$M = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad N = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

2. $F(x,y) = (1,1)$
   $f(x,y) = x + y$

   es conservativo ya que el gradiente coincide con el campo vectorial;

   $$M = \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \qquad N = \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

3. $F(x,y) = (2x, 1)$
   $f(x,y) = x^2 + y$

   es conservativo ya que el gradiente coincide con el campo vectorial;

   $$M = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad N = \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

Teorema (Independencia del camino)

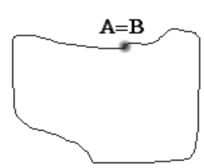
Si F es un campo vectorial conservativo, entonces la integral de línea de F no depende de la trayectoria, sólo depende del punto inicial y el punto final de esta curva. Más aún , si f es una función potencial, y A y B son los puntos iniciales y finales de la curva; entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} F\, d\lambda = f(B) - f(A)$$

1. ¿Cómo se sabe si un campo vectorial es conservativo?
2. Sabiendo que un campo F es conservativo, ¿cómo se encuentra una función potencial?

Observación

¿Qué pasa si F es conservativo y λ es una curva cerrada?.



$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} F\, d\lambda &= f(B) - f(A) \\ &= f(B) - f(B) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Notación

Si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada

$$\int_{\mathcal{C}} F\, d\lambda = \oint F\, d\lambda$$

Teorema
Un campo vectorial $F = (M, N)$ es conservativo si y solo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ejemplo:

Determinar si F es conservativo.

1. $F(x, y) = (2x + 3y^3, 9x^2y + 2y)$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 9y^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 18xy \qquad \underline{\textbf{NO}}$$

2. $F(x, y) = (x^2, xy)$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y \qquad \underline{\textbf{NO}}$$

3. $F(x, y) = (2x + 3y^3, 9xy^2 + 2y)$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 9y^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 9y^2 \qquad \underline{\textbf{SI}}$$

4. $F(x, y) = (2xy, x^2 + \cos y)$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \qquad \underline{\textbf{SI}}$$

5. $F(x, y) = (x^3 + y^2, 2xy^2 + \sin y)$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y^2 \qquad \underline{\textbf{NO}}$$

Sea F un campo vetorial conservativo, entonces ahora analizaremos la busqueda de la función potencial.

Si f es la función potencial, entonces:

$$(i) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad\qquad (ii) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Entonces, si integramos la igualdad (i) con respecto a x

$$f(x,y) = \int M\,dx + g(x)$$

y ahora derivando esta igualdad con respecto a y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M\,dx\right] + g'(y) = N \\
g'(y) &= N - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M\,dx\right] \\
g(y) &= \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M\,dx\right)\right] dy
\end{aligned}$$

Ejemplo:

1. Sea F campo vectorial, conservativo

$$F(x,y) = (2xy, x^2),$$

encontrar la función potencial f.

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad\qquad (II) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

P1) $f(x,y) = x^2y + g(y)$

P2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y)$

P3) $x^2 = x^2 + g'(y)$

P4) $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$

Por lo tanto la función potencial es:

$$f(x,y) = x^2y + C$$

2. Sea F campo vectorial, conservativo

$$F(x,y) = (x^2+2y, 2x+y),$$

encontrar la función potencial f.

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = x^2+2y \qquad\qquad (II) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x+y$$

P1) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + 2xy + g(y)$

P2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + g'(y)$

P3) $2x+y = x^2 + g'(y)$

P4) $g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \dfrac{y^2}{2} + C$

Por lo tanto la función potencial es:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2xy + \frac{y^2}{2} + C$$

3. Sea F campo vectorial, conservativo

$$F(x,y) = (3+2xy, x^2-3y^2),$$

encontrar la función potencial f.

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3+2xy \qquad\qquad (II) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2-3y^2$$

P1) $f(x,y) = 3x + x^2y + g(y)$

P2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y)$

P3) $x^2-3y^2 = x^2 + g'(y)$

P4) $g'(y) = -3y^2 \Rightarrow g(y) = -y^3 + C$

Por lo tanto la función potencial es:

$$f(x,y) = 3x + x^2y - y^3 + C$$

La función potencial de un campo vectorial conservativo corresponde a una suerte de primitiva, ya que (por el Teorema de la independencia del camino) se tiene, al igual que en el llamado Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_{\lambda} F\, d\lambda = f(B) - f(A)$$

donde A es el punto inicial y B el punto final de la curva λ. Entonces, saber calcular la función potencial de los campos vectoriales conservativos permite reducir el cálculo de las integrales de línea al cálculo de esta función potencial. Veamos esto usando los ejemplos anteriores:

1. Consideremos el campo vectorial $F(x, y) = (2xy, x^2)$. Ya vimos que es conservativo y una función potencial es: $f(x, y) = x^2y + C$. Por lo tanto, si queremos calcular la integral de línea de este campo sobre una curva, nos basta conocer el punto inicial y el punto final de esta curva. Por ejemplo, calculemos la integral de este campo sobre la curva $\lambda(t) = (2t, t + 1)$, $t \in [1, 3]$. Entonces,

$$\int_{\lambda} F\, d\lambda = f(6, 4) - f(2, 2) = (6^2 \cdot 4 + C) - (2^2 \cdot 2 + C) = 144 - 8 = 136$$

2. Sea $F(x, y) = (x^2 + 2y, 2x + y)$, calculemos la integral de línea de este campo sobre la curva $\beta(t) = (1 - t, t^2)$, $t \in [0, 1]$. Como la función potencial de F es $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + 2xy + \frac{y^2}{2} + C$, se tiene:

$$\int_{\beta} F\, d\beta = f(0, 1) - (1, 0) = \left(\frac{1}{2} + C\right) - \left(\frac{1}{3} + C\right) = \frac{1}{6}$$

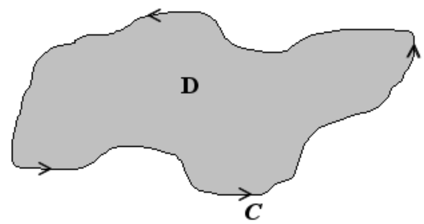
3. Sea $F(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$, calculemos la integral de línea de F sobre la curva $\lambda(t) = (2t - 3, t + 5)$, $t \in [1, 2]$. Dado que la función potencial de este campo es $f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + C$, se tiene:

$$\int_{\lambda} F\, d\lambda = f(1, 7) - f(-1, 6) = (10 - 7^3 + C) - (3 - 6^3 + C) = -333 - (-213) = -120$$

4.6 Teorema de Green

Una integral de línea sobre una curva cerrada se puede calcular mediante en una integral doble sobre una región y viceversa.

Sea F un campo vectorial y sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, llamamos D a la región encerrada por la curva.



También decimos que $\mathcal{C}$ es la frontera de la región D. Si una **hormiga** camina por sobre la curva en el sentido del transito y la región está siempre a mano izquierda decimos que la curva (frontera) está orientada positivamente.

Teorema de Green
Sea F un campo vectorial con componentes M y N que tengan derivadas parciales continuas. Sea D una región del plano de tipo I, II ó III. Entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} F\, d\lambda = \int\int_{D} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

donde $\mathcal{C}$ es la frontera de la región D, orientada positivamente.

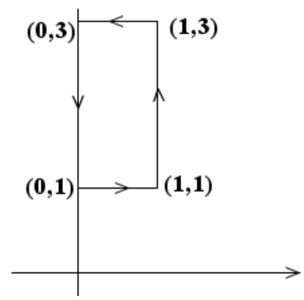
Utilizamos como notación, en lugar de $\mathcal{C}$, la siguiente:

$$\begin{aligned} \partial D &= \text{frontera de}\, D \\ \partial D^{+} &= \text{frontera de }\, D\, \text{orientada positivamente} \end{aligned}$$

Ejercicios:

Verificar el teorema de Green en los siguientes ejercicios

1. Calcular $\oint_{\mathcal{C}} F\, d\lambda$, si $F(x, y) = (y - x^2 e^x, \cos(2y^2) - x)$, donde $\mathcal{C}$ es el rectángulo con vértices $(1, 1), (0, 1), (1, 3), (0, 3)$, orientada en sentido contrario al reloj.



$$\int_{\mathcal{C}} F\,d\lambda = \int\int_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$\begin{aligned} M &= y - x^2e^x \quad &\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ N &= \cos(2y^2) - x &\rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{aligned}$$

$$\int\int_D (-2)\,dA = (-2)(1)(2) = -4$$

2. $\oint_{\mathcal{C}} 2x\cos(2y)\,dx - 2x^2\sin(2y)\,dy$

   Para toda curva cerrada simple suave, orientada +.

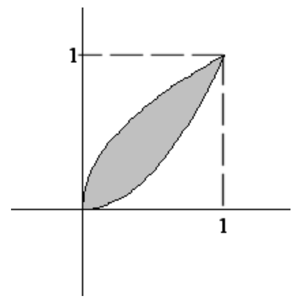
$$\begin{aligned} M &= 2x\cos(2y) \quad &\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -4x\sin(2y) \\ N &= -2x^2\sin(2y) &\rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -4x\sin(2y) \end{aligned}$$

$$\int\int_D \left[(-4x\sin(2y)) - (-4x\sin(2y))\right]\,dA = 0$$

3. Sea $\mathcal{C}$ la curva cerrada formada por las curvas $y = x^2$, $x = y^2$, calcule

$$\int_{\mathcal{C}} (y + e^{\sqrt{x}}) + (2x + \cos y^2)\,dy$$

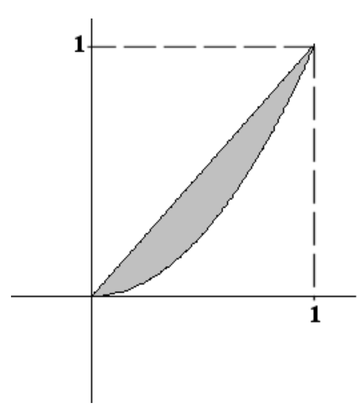
$$\begin{aligned} M &= y + e^{\sqrt{x}} \quad &\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ N &= 2x + \cos y^2 &\rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\int\int_D dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\,dx \\
&= \int_0^1 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\,dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

4. Calcular $\oint (xy + y^2)\,dx + x^2\,dy$, limitada por $y = x$ y $y = x^2$

$$\begin{aligned}
M &= xy + y^2 \;\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y \\
N &= x^2 \qquad\;\; \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\int\int_D dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} [2x - (x+2y)]\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 [xy - y^2]\Big|_{x^2}^{x} dx \\
&= \int_0^1 [x^4 - x^3]\, dx \\
&= -\frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Dejamos los siguientes ejercicios para que los resuelva el lector:

1. Verifique el teorema de Green para $P = x$ y $Q = xy$ donde D es el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$.

2. Verifiquemos el teorema de Green para el campo $F(x,y) = (3x^2y, -x^3)$ donde D es la región comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$.

3. Usemos el teorema de Green para calcular la integral de línea del campo $F(x,y) = (2x+y, -x+4xy)$ sobre el círculo $x^2+y^2 = 1$ recorrido una vez en sentido antihorario.

4. Sea $F(x,y) = (y, -x)$ y sea C el círculo de radio r recorrido contra reloj. Escriba $\int_C F d\lambda$ como una integral doble usando el teorema de Green.

5. Sea C la frontera del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ orientada positivamente. Evalúe,
$$\int_C (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$$

6. Sea C la frontera del rectángulo con lados $x = 1$, $y = 2$, $x = 3$, $y = 3$.

   Evalue las siguientes integrales:

   (a) $\int_C (2y^2 + x^5)dx + 3y^6 dy$

   (b) $\int_C (xy^2 - y^3)dx + (-5x^2 + y^3)dy$

   (c) $\displaystyle\int_C \left[\frac{2y + \sin x}{1 + x^2}\right] dx + \left[\frac{x + e^y}{1 + y^2}\right] dy$

7. Desafío. Considere los círculos de radio 1 centrados en el $(2,0)$ y en el $(-2,0)$ y el círculo de radio 4 centrado en el origen. Sea D la región al interior del mayor círculo y al exterior de los círculos menores. Verificar el teorema de Green para el campo $F(x,y) = (-y, x)$. Indicación: Parametrice las fronteras de estos discos para que la frontera de D tenga orientación *positiva*.

4.6.1 Cálculo de áreas usando el Teorema de Green

Consideremos una región D cuya frontera $\mathcal{C}$ es una curva cerrada y simple, orientada positivamente. Sea $F(x,y)=(0,x)$, entonces $\frac{\partial N}{\partial x}=1$ y $\frac{\partial M}{y}=0$. Por lo tanto el lado derecho del Teorema de Green es igual a $\int\int_D dA =$ área de D. Por otro lado, el lado izquierdo del mismo teorema nos da: $\int_{\mathcal{C}+} xdy$. Asimismo, este argumento se puede usar para el campo $F(x,y)=(-y,0)$, lo que da como resultado área de $D=\int_{\mathcal{C}+} -ydx$. Finalmente, una situación un poco más simétrica se obtiene con el campo $F(x,y)=(-y,x)$ y el resultado está reflejado en el siguiente:

Teorema El área A de la región D encerrada por una curva cerrada simple C y orientada positivamente es:

$$A=\int_{\mathcal{C}} x\,dy=\int_{\mathcal{C}} -y\,dx=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} x\,dy-y\,dx$$

Este teorema nos ofrece tres integrales de línea que nos permiten calcular el área de una región D. A pesar de que las dos primeras fórmulas son más simples, la tercera permite en algunos casos una integración más sencilla.

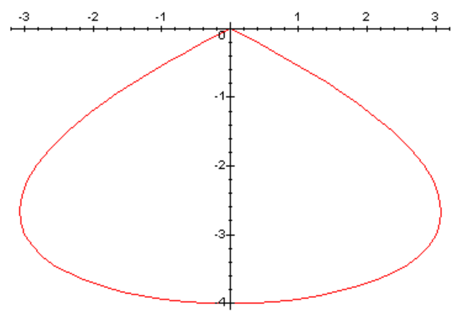
Ejemplos:

1. Calcular el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

   Primero, una parametrización de la elipse con orientación positiva es: $\lambda(t)=(a\cos t, b\sin t), \quad t\in[0,2\pi]$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} x\,dy-y\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left((a\cos t)(b\cos t)-(b\sin t)(-a\sin t)\right)\,dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt\\
&= \frac{ab}{2}2\pi=\pi ab
\end{aligned}$$

2. Calcular el área de la región acotada por la curva $\lambda(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ con $-2 \leq t \leq 2$. Observe que se trata de una curva cerrada simple que se recorre en sentido horario.



Se tiene entonces (el signo menos representa la orientación negativa de la curva),

$$A = -\int_{\lambda} x\,dy = -\int_{-2}^{2} (t^3 - 4t)2t\,dt = -\int_{-2}^{2} (2t^4 - 8t^2)\,dt = -\left(\frac{2}{5}t^5 - -\frac{8}{3}t^3\right)\Big[_{-2}^{2} = \frac{256}{15}$$

4.7 Ejercicios de Cálculo Vectorial (Capítulo IV)

1. (a) Parametrizar C el círculo de radio 3 centrado en el punto $(-2, 7)$ en el sentido horario.
   (b) Cambiar la orientación de la curva $\lambda(t) = (t^2 - 1, t^2 + 1)$, $t \in [0, 2]$
   (c) Determine si $\beta(t) = (\cos(t), \cos^3(t))$ con $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ es una curva cerrada. Asimismo, reparametricela en el intervalo $[1, 3]$ y dibuje la curva.

2. Considere la curva parametrizada por $\lambda(t) = (\sqrt{2}\cos t - 1, \sqrt{2}\sin t - 1)$.
   (a) Dibuje (con precisión) la curva y su orientación.
   (b) Reparametrice la curva para recorrerla en el sentido opuesto y en la mitad del tiempo (aquí suponemos que t representa el tiempo).
   (c) Reparametrice la curva original sobre el intervalo $[-1, 1]$, conservando la orientación.

3. Calcule la integral
$$\int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy$$
donde C es la frontera, orientada negativamente, de la región acotada por la gráfica de $y = \sqrt{x}$ y de la recta del punto $(4, 2)$ al origen.

4. Calcular la integral de línea
$$\int_C 6xy\, dx + (3x^2 + 2y)\, dy$$
donde C es una curva que une los puntos $P = (0, 0)$ y $Q = (1, 1)$ en cada uno de los siguientes casos:
   (a) C es el segmento que une P y Q.
   (b) C es el arco de la parábola $x = y^2$ que va de P a Q.
   (c) C va del punto P al punto $(0, 1)$ y de ahí al punto Q.

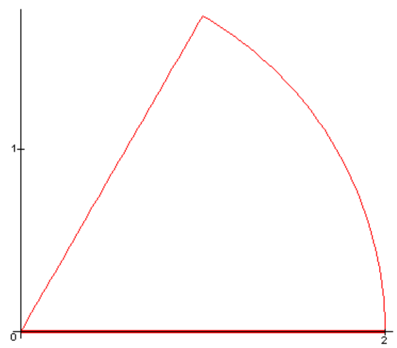
5. Calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x, y) = (xy, x+y)$ sobre el rectángulo (orientado positivamente) con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$.

6. Sea a una constante. Para la función $F(x, y) = (x + 4y, ax + y)$ y la curva λ dada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$ orientado positivamente. Calcular la integral de línea
$$\int_\lambda F\, d\lambda$$

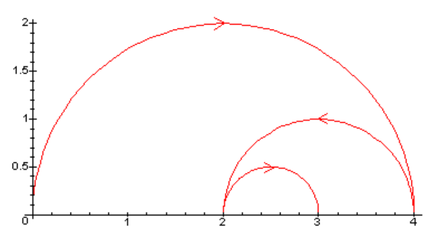
7. Evalúe la integral de línea
$$\int_\lambda 2xy\, dx + x^2\, dy$$
donde λ está parametrizada por $\lambda(t) = (\cos 8t, 5 \sin 16t)$, con $0 \leq t \leq \pi/4$.

8. Calcule la integral
$$\oint_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy$$
donde C es la frontera de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$

9. Calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x, y) = (x + y, x^2)$ sobre la curva que se ilustra, orientada positivamente. (segmento del origen al $(2, 0)$, arco de círculo de radio 2 y segmento de $(1, \sqrt{3})$ al origen.



10. Calcular la integral de línea del campo $F(x, y) = (4x + \sin^2 y,\ x \sin 2y + 1)$ sobre la curva que se ilustra (cada tramo es un semicírculo).



11. Considere el campo vectorial $F(x, y) = (2xy^2 + y + 5, 2x^2y + x + 2)$

    (a) Demuestre que es conservativo

    (b) Encuentre una función potencial para F

    (c) Calcule la integral de línea de F a lo largo de la curva $\lambda(t) = (t + \cos(\pi t), t - \cos(\pi t)), \quad t \in [0, 1]$.

12. (a) Sea $F(x, y, z) = (e^x \sin y + 1, e^x \cos y + 1)$. Demuestre que F es conservativo.

(b) Encuentre una función potencial para F.

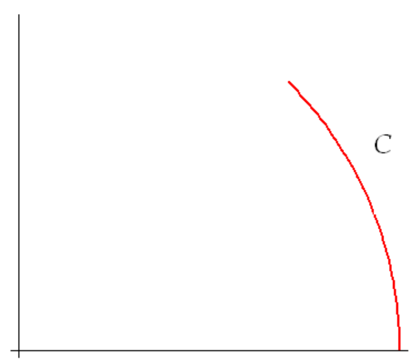
13. Calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (xy, \sin y)$ sobre la frontera del triángulo con vértices $(1,1),(2,2),(3,0)$ recorrido una vez en sentido antihorario.

14. Calcule el área de la región acotada por las funciones $y = x^2 - 4x$ e $y = 4x - x^2$ usando el Teorema de Green.

15. Considere la curva C, definida como al arco de círculo de radio r y ángulo central $k\pi$ dónde $0 < k \leq 2$, como se muestra en la figura. Calcular

$$\int_{\lambda} F \, d\lambda$$

donde $F(x,,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$



16. Calcular la integral de línea

$$\int_C (x+y)^2 \, dx - (x-y)^2 \, dy$$

donde C es el contorno, orientado positivamente, de la curva formada por la sinusoidal $y = \sin x$ y el segmento del eje x entre 0 y π.

17. Verifique el Teorema de Green para el campo vectorial $F(x,y) = (3x^2y, -x^3)$, donde D es la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$.

18. Calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (x^5 + 4y, 6x - y^4)$ sobre el círculo $x^2 + y^2 = 16$.

19. Sea $F(x,y)$ un campo conservativo, si la integral de F sobre la curva ABE es 3 y la integral de F sobre el segmento BE es 2, calcular la integral sobre:

    (a) $ABCDE$

    (b) $EDCB$

20. Considere la función $f(x,y) = xy + e^{xy}$. Sea λ la curva dada por $\lambda(t) = \left(t^2 + 1, \dfrac{t-1}{t+1}\right)$, donde $t \in [0,1]$. Calcule la integral de línea

$$\int_\lambda \nabla f \, d\lambda$$

21. Calcule la integral de línea $\oint_\mu F \cdot d\mu$, donde $F(x,y) = (2x+y, -x+4xy)$ y μ representa el círculo $x^2 + y^2 = 4$ recorrido una vez en sentido antihorario.

Capítulo 5

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

5.1 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Estas ecuaciones son una herramienta fundamental para estudiar **el cambio** (en el mundo natural y social). En la ciencias de la vida, en la ingeniería, en la física, en la psicología, en la biología, entre muchas otras áreas, estas ecuaciones son herramientas fundamentales en los aspectos cuantitativos que tienen relación con el cambio. Una gran parte de los modelos matemáticos que buscan comprender y predecir los fenómenos tienen su base en la teoría de ecuaciones diferenciales.

Ejemplos de estos modelos son caída libre, decaimiento radiocativo, la ley de enfriamiento de Newton, el crecimiento de poblaciones, modelos de osciladores armónicos y resortes, modelamiento de circuitos eléctricos, caos, etc.

(a) Ley de Newton de caída libre. Si un objeto (por ejemplo una manzana) se libera de una altura dada, la masa del objeto por su aceleración es igual a la fuerza que actúa sobre él:
$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg$$
donde m es la masa, h la altura desde el suelo, g es la aceleración gravitacional y d^2h/dt^2 es la aceleración del objeto.

(b) Ley de enfriamiento de Newton: La tasa de cambio de la temperatura T de un cuerpo con respecto al tiempo (t) es proporcional a la diferencia de la temperatura del cuerpo y del medio ambiente, que llamaremos A.
$$\frac{dT}{dt} = k(A - T)$$

(c) La tasa de cambio de la población $P(t)$ es proporcional al tamaño de la población:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

(d) La ecuación de Laplace (usada en electricidad, calor y aerodinámica, entre muchas otras aplicaciones) es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Esta no es una ecuación diferencial ordinaria, se denomina *ecuación en derivadas parciales.*

Dicho de manera simple, una Ecuación Diferencial Ordinaria **(EDO)** involucra una función y (dependiente de una variable x) y una o más de sus derivadas. Más precisamente, toda ecuación diferencial de primer orden se puede escribir de la forma:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5.1}$$

Una solución de esta ecuación es una función $f(x)$ que al sustituirla por y en la ecuación (5.1) sastisface la ecuación para todo x en un intervalo.

Otros ejemplos: en los siguientes ejemplos más abstractos, y es una función de la variable x.

(a) $y' = ky$	(b) $y' = 2x$	(c) $y'' = 6x$
(d) $y'' + y' = 0$	(e) $y'' = y$	(f) $3y^{iv} - 2y''' + 4y'' = 2x$

En una ecuación diferencial, la derivada puede aparecer en forma implícita a través de diferenciales, como en la siguiente:

$$(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$$

Esta ecuación puede ser escrita como:

$$x^2 + y^2 - 2xy\,\frac{dy}{dx} = 0$$

o bien de la forma

$$(x^2 + y^2)\,\frac{dx}{dy} - 2xy = 0$$

por lo que podemos considerar a cualquiera de las dos variables como la variable dependiente y la otra será la independiente.

En los siguientes ejemplos, para cada ecuación diferencial encontramos una o más soluciones de manera artesanal (es decir sin métodos específicos).

1. $y' = x^2 - 2x$. Por simple integración podemos saber que una solución es $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2$. Aunque, la solución más general posible es: $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + c$

2. $y' = y$. Sabemos que una función que no cambia al derivarla es $y = e^x$, por lo tanto es una solución. Al igual que en el ejemplo anterior, otra solución será $y = c\,e^x$.

3. $y' + 2y = 0$ se puede escribir como: $y' = -2y$. Una solución es: $y = e^{-2x}$, en efecto $y' = -2e^{-2x}$ Pero otra solución también es: $y = c\,e^{-2x}$.

4. $y'' + y = 0$. Para encontrar soluciones, tratamos de recordar qué funciones cumplen con esta ecuación, es decir, qué función al derivarla dos veces cambia de signo. Dos ejemplos son $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sin x$. En efecto, $f'(x) = -\sin x$ y $f''(x) = -\cos x$. Lo mismo sucede con $g(x)$. Pero también la función $h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.

En este capítulo sólo estudiaremos ecuaciones diferenciales de primer orden, es decir, aquellas que involucran sólo la primera derivada de y. Estas ecuaciones tienen la siguiente particularidad:

> Toda ecuación diferencial de **primer orden** se puede escribir como:
>
> $$y' = f(x, y) \qquad \text{ó} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Del primer ejemplo podemos concluir algo más general:

La ecuación

$$y' = f(x)$$

se resuelve mediante integración y la solución es:

$$y = \int f(x)\,dx$$

Entonces, el estudio de este tipo de ecuaciones puede entenderse como el estudio del cálculo integral de una variable, para lo cual se establecieron una serie de métodos y más particularmente el famoso *Teorema Fundamental del Cálculo*.

En los ejemplos anteriores, las soluciones son funciones que pueden ser expresadas de manera *explícita*. Consideremos la ecuación

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Multiplicando por $2y$ obtenemos

$$2yy' = -2x$$

luego integrando a ambos lados y recordando la Regla de la Cadena (en este caso, el hecho que $(y^2)' = 2yy'$) obtenemos

$$\begin{aligned} y^2 &= -x^2 + C \text{ o bien} \\ x^2 + y^2 &= C \end{aligned}$$

Entonces decimos que *la ecuación* $x^2 + y^2 = C$ es la solución de la ecuación diferencial $y' = -x/y$. Con esto queremos decir que esta ecuación define de manera *implícita* las soluciones de la ecuación (la solución $y = \sqrt{C - x^2}$ y la solución $y = -\sqrt{C - x^2}$). Entonces:

Se dice que una relación (ecuación) $G(x, y) = 0$ es una solución de una ecuación diferencial en el intervalo I, si ésta define una o más soluciones explícitas en I.

En esta teoría de las ecuaciones diferenciales hay tres cuestiones básicas. La primera tiene que ver con los modelos matemáticos: Determinar qué ecuación diferencial describe un fenómeno específico. La segunda es acerca de la existencia de soluciones: Sabemos que en las ecuaciones algebraicas, algunas tienen solución y otras no (como por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$).

Entonces, una importante pregunta es si una ecuación diferencial dada tiene o no solución. Y finalmente, sabiendo que una ecuación tiene solución necesitamos, en algunos casos, saber si hay otras soluciones (unicidad de la solución). El siguiente resultado da respuesta a estas dos últimas cuestiones para el caso de las ecuaciones de orden 1.

Teorema (existencia y unicidad de la solución.) Para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_o) = y_o$$

si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en un rectángulo

$$R = \{\, (x, y) \mid a < x < b,\ c < y < d\}$$

que contiene el punto (x_o, y_o), entonces existe una única solución $\phi(x)$ definida en un intervalo alrededor del número x_o, que pasa por el punto (x_o, y_o).

Las ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden escribir indistintamente de las formas:

1. $y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$
2. $M\,dx + N\,dy = 0$, donde M y N son funciones reales de las variables x e y.

Ejemplos:

(a) $y' = 3xy$	(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$	(c) $y' = x^2 + y^2$
(d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x+y}$	(e) $y\,dx + x\,dy = 0$	(f) $(x^2 + y^2)\,dx - x^2y\,dy = 0$

En todo caso se puede pasar fácilmente de una descripción a la otra:

1.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ dy &= f(x, y)\,dx \\ -f(x, y)\,dx + dy &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} M\,dx + N\,dy &= 0 \ \ / \div\ dx \\ M + N\,\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{M}{N} \end{aligned}$$

Ejemplos:

(a) $y' = 3xy \ \Rightarrow\ M\,dx + N\,dy = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = 3xy \ \rightarrow\ dy = 3xy\,dx$

$-3xy\,dx + dy = 0$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

$x\,dy = y\,dx$

$-y\,dx + x\,dy = 0$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

$dy = (x^2 + y^2)dx$

$-(x^2 + y^2)dx + dy = 0$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x+y}$

$(x+y)\,dy = x\,dx$

$-x\,dx + (x+y)\,dy = 0$

(e) $y\,dx + x\,dy = 0$

$y' = G(x,y)$

$x\,dy = -y\,dx$

$x\,\dfrac{dy}{dx} = -y$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{x}$

$y' = \dfrac{-y}{x}$

(f) $(x^2+y^2)\,dx - x^2y\,dy = 0$

$(x^2+y^2)\,dx = x^2y\,dy$

$(x^2+y^2) = x^2y\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{x^2+y^2}{x^2y} = \dfrac{dy}{dx}$

5.2 Curvas isoclinas

Una técnica útil para visualizar la familia de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden es dibujar (con la ayuda de un computador) el campo de direcciones de la ecuación. En una ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$f(x,y)$ es la pendiente de la solución en el punto (x,y). Es decir, $f(x,y)$ nos provee de la dirección que debe tener una solución de la ecuación diferencial en cada punto. Entonces para dibujar el campo de direcciones, en cada punto del plano (en realidad de una grilla) dibujamos la dirección (pendiente) que tiene la solución en ese punto.

Ejemplos.

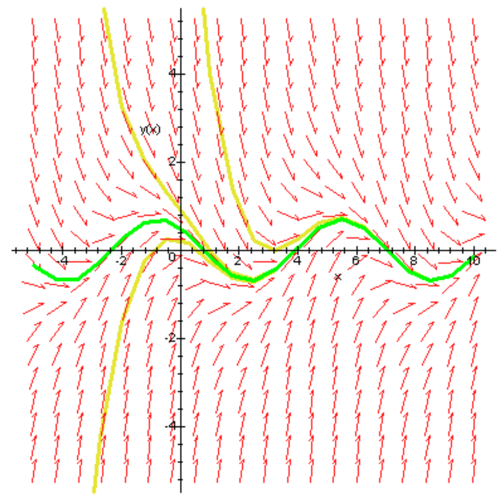
1. Para la ecuación,

$$y' = -y - \sin x$$

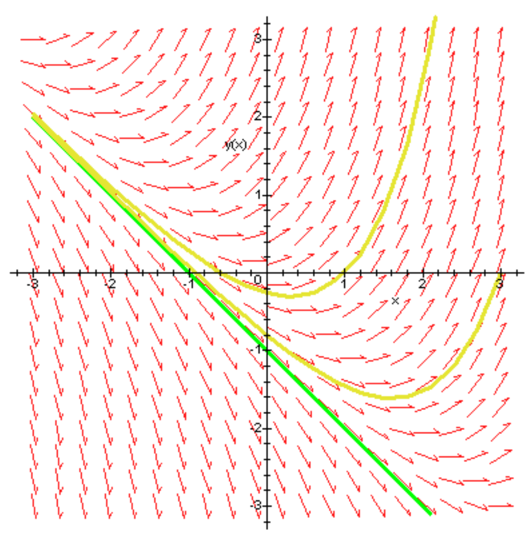
cuya solución general es

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{2} + ce^{-x}$$

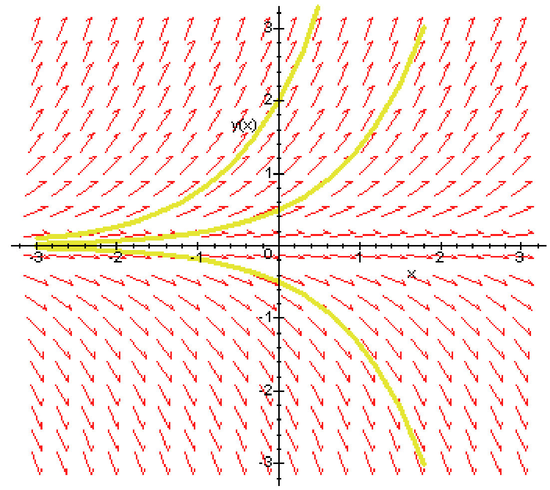
el campo de direcciones se muestra en la figura siguiente, junto con la gráfica de cuatro miembros de la familia de soluciones (que llamamos *curvas isoclinas.*) Se puede apreciar que tres de las curvas convergen a una cuarta (onda verde en la pantalla). Esta cuarta curva es la solución que se obtiene al poner $c = 0$, es decir $y = (\sin x + \cos x)/2$.



2. En la ecuación
$$y' = x + y$$
que tiene como solución a
$$y = ce^x - (x+1)$$
también mostramos el campo de direcciones junto a tres curvas isoclinas (soluciones particulares). La recta que se aprecia (en verde en pantalla) es la solución con $c = 0$.



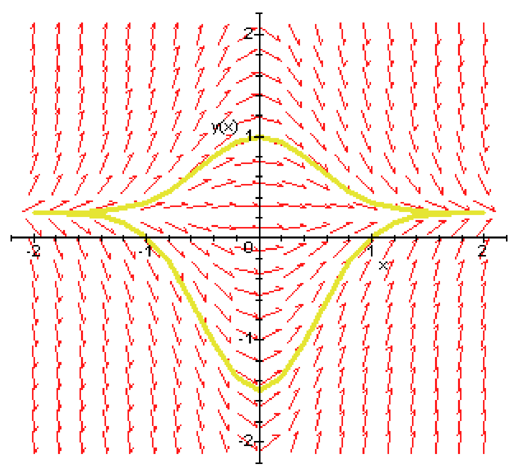
3. Para la ecuación
$$y' = y$$
cuya solución general es $y = c \cdot e^x$, mostramos el campo de direcciones y algunas de las soluciones particulares: para $c = 2$, $c = 0.5$ y $c = -0.5$



4. En el caso de la ecuación $y' = x - 4xy$, la solución general es

$$y = \frac{1}{4} + c \cdot e^{-2x^2}.$$

Se ilustra el campo de direcciones y algunas curvas isoclinas: $c = 1$ y $c = -1.5$.



En resumen, en la gráfica del campo de direcciones de una ecuación diferencial se pueden apreciar todas las soluciones de la ecuación dada. Por el teorema de existencia y unicidad, cada *curva solución* se determina, ya sea dándole un valor a la constante c o de forma equivalente, estipulando un punto (x_o, y_o) del plano por donde pasa la solución.

5.3 Ecuaciones diferenciales separables

Una **EDO** de primer orden

$$y' = f(x,y)$$

se llama separable si $f(x,y)$ se puede escribir como un producto $F(x)G(y)$, de una función de x por una función de y.

Ejemplos:

(a) $y' = 3xy$ es separable

$y' = 3x \cdot y$

(b) $y' = \dfrac{y}{x}$ es separable

$y' = \dfrac{1}{x} \cdot y$

(c) $y' = x^2 + y^2$ no es separable

(d) $y' = \dfrac{x}{x+y}$ no es separable

¿Por qué se llama separable?

$$\begin{aligned} y' &= F(x) \cdot G(y) \\ \frac{dy}{dx} &= F(x) \cdot G(y) \\ \frac{dy}{G(y)} &= F(x)\,dx \;\rightarrow \text{ las variables están } \textbf{separadas} \end{aligned}$$

Método: $y' = F(x) \cdot G(y)$

(P.1) Separar las variables

$$\frac{dy}{G(y)} = F(x)\,dx$$

(P.2) Integrar en ambos lados

$$\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x)\,dx$$

(P.3) Despejar y de la ecuación anterior

(P.4) Si y no se puede despejar, entonces la ecuación resultante sera la solución **implicita** de la **EDO**.

Ejemplo:

1. $y' = 3xy$

$$\frac{dy}{dx} = 3xy$$

$$\frac{dy}{y} = 3x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3x\,dx$$

$$\ln y = \frac{3x^2}{2} + C \quad /exp$$

$$y = e^{\frac{3x^2}{2}} e^C \quad \rightarrow \quad \text{Solución general explicita}$$

2. $y' = \dfrac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln x + C \quad /exp$$

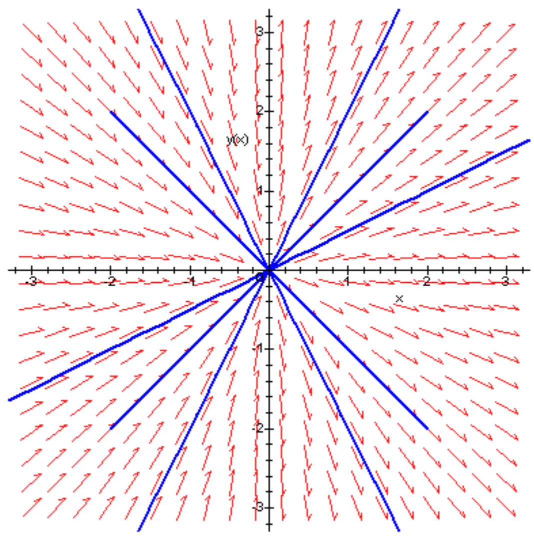
$$e^{\ln y} = e^{\ln x + C}$$

$$y = e^{\ln x} e^C$$

$$y = xe^C$$

Como se puede apreciar, la solución general es una familia de funciones que dependen de un parámetro (constante de integración). Si, por simplicidad, llamamos m a la constante e^C, tenemos:

$y = m\,x$ rectas que pasan por el origen



3. $y' = -\dfrac{x}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

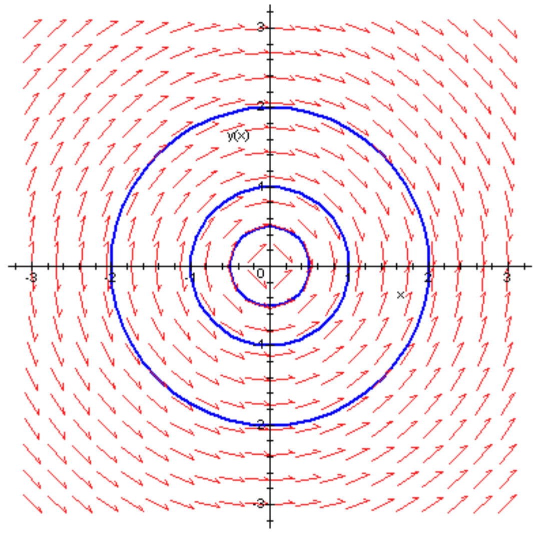
$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$x^2 + y^2 = 2C$ solución general implicita círculos centrados en el origen

Familia de soluciones (campo de direcciones y algunas soluciones particulares)



5.4 Ecuaciones Homogéneas

Funciones homogéneas: Una función de 2 variables $H(x, y)$ se llama homogénea de grado r si para todo x cualquiera se tiene:

$$H(tx, ty) = t^r H(x, y)$$

Ejemplo: Funciones homogéneas

(a) $H(x, y) = x + y$ (b) $H(x, y) = x^2 + xy$ (c) $H(x, y) = \dfrac{x}{y}$

(d) $H(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (e) $H(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ (f) $H(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

Veamos:

(a) $H(tx, ty) = tx + ty = t(x + y) \ \rightarrow$ es homogénea de grado 1

(b) $H(tx, ty) = (tx)^2 + (tx)(ty) = t^2x^2 + t^2xy = t^2(x^2 + xy) \ \rightarrow$ es homogénea de grado 2

(c) $H(tx,ty) = \dfrac{tx}{ty} = \dfrac{x}{y} = t^0\dfrac{x}{y} \;\rightarrow\;$ es homogénea de grado 0

(d) $H(tx,ty) = \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = \sqrt{t^2(x^2+y^2)} = t\sqrt{x^2+y^2} \;\rightarrow\;$ es homogénea de grado 1

(e) $H(tx,ty) = e^{\frac{tx}{ty}} = e^{\frac{x}{y}} = t^0 e^{\frac{x}{y}} \;\rightarrow\;$ es homogénea de grado 0

(f) $H(tx,ty) = \dfrac{1}{t^2x^2 + t^2y^2} = \dfrac{1}{t^2}\dfrac{1}{x^2+y^2} = t^{-2}\dfrac{1}{x^2+y^2} \;\rightarrow\;$ es homogénea de grado -2

Propiedades de las funciones homogéneas

1. $H(x,y) = C$ es homogenea de grado 0
2. x e y son homogeneas de grado 1
3. Si H y G son homogeneas de grado r y s respectivamente, entonces:
   (a) $H(x,y)\cdot G(x,y)$ es homogénea de grado $r+s$
   (b) $H(x,y)/G(x,y)$ es homogénea de grado $r-s$
   (c) $[H(x,y)]^k$ es homogénea de grado $k\cdot r$
   (d) Si $r \neq s$, entonces $H(x,y)+G(x,y)$ no es homogénea
   (e) Si $r = s$, entonces $H(x,y)+G(x,y)$ es homogénea de grado r ó es la función 0
4. la función 0 no tiene grado.

Definición: Supongamos que M y N son homogéneas de grado r, entonces la **EDO**:

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad \text{se llama } \textbf{Ecuación homogenea}$$

Teorema:

Si $f(x,y)$ es homogénea de grado 0, entonces $f(x,y)$ depende sólo de la variable $u = \dfrac{x}{y}$ ó $v = \dfrac{y}{x}$

Método de solución de una ecuación homogénea

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

la función M/N es homogénea de grado 0, por el teorema anterior, si $u = \dfrac{y}{x}$, se tiene:

$$\frac{M}{N} = g(u) \tag{5.2}$$

$$dy = d(ux) = x\,du + u\,dx$$

De lo que se concluye que:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \tag{5.3}$$

Luego consideramos la ecuación original y la dividimos por N:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad / \div N$$

Para obtener:

$$\frac{M}{N} + \frac{dy}{dx} = 0$$

Utilizando la igualdad (5.3):

$$\frac{M}{N} + x\frac{du}{dx} + u = 0$$

Usando ahora la igualdad (5.2):

$$x\frac{du}{dx} = -u - g(u)$$

Finalmente podemos separar la variables para llegar a:

$$\frac{du}{u+g(u)} = -\frac{dx}{x} \;\rightarrow\; \textbf{separable}$$

Método:

- Partir de una ecuación homogénea
- Hacer cambio de variable $u = \dfrac{y}{x}$ ó $v = \dfrac{x}{y}$
- Reescribir como una ecuación separable en u y x ó en v e y.

Ejercicios:

1. $(x^2 - xy + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

   $(x^2 - xy + y^2) = M \;\rightarrow\;$ homogénea de grado 2

   $-xy = N \;\rightarrow\;$ homogénea de grado 2

   $$\Rightarrow \textbf{EDO} \text{ es homogénea de grado 2}$$

   Solución: Sea $u = \dfrac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = ux$

   $$\begin{aligned}
   (x^2 - xux + u^2x^2)\,dx - xux(u\,dx + x\,du) &= 0 \\
   x^2(1 - u + u^2)\,dx - x^2u(u\,dx + x\,du) &= 0 \quad / \div x^2 \\
   (1 - u + u^2)\,dx - u(u\,dx + x\,du) &= 0 \\
   (1 - u + u^2 - u^2)\,dx - ux\,du &= 0 \\
   (1 - u)\,dx - ux\,du &= 0 \\
   (1 - u)\,dx &= ux\,du \\
   \frac{dx}{x} &= \frac{u}{1-u}\,du
   \end{aligned}$$

   Integramos a ambos lados

   $$\begin{aligned}
   \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{u}{1-u}\,du \\
   \int \frac{dx}{x} &= \int \left(-1 + \frac{1}{1-u}\right) \\
   \ln x &= -u - \ln(1-u) + C \\
   \ln x &= -\frac{y}{x} - \ln(1 - \frac{y}{x}) + C
   \end{aligned}$$

2. Resolver usando las dos sustituciones posibles ($y = ux$ y $x = vy$):

$$(x - 2y)\, dx + (2x + y)\, dy = 0$$

Solución:La ecuación es homogénea de grado 1.

$$y = ux \;\Rightarrow\; dy = u\, dx + x\, du$$

$$\begin{aligned}
(x + 2ux)\, dx + (2x + ux)(u\, dx + x\, du) &= 0 \\
x(1 - 2u)\, dx + x(2 + u)(u\, dx + x\, du) &= 0 \\
[1 - 2u + (2 + u)u]\, dx + (2 + u)x\, du &= 0 \\
(1 - u^2)\, dx &= -(2 + u)x\, du \\
\frac{dx}{x} &= -\frac{(2 + u)}{1 + u^2}\, du
\end{aligned}$$

Las integrales son fáciles de calcular y las dejamos al lector.

$*$ Usemos ahora la sustitución: $x = vy \;\Rightarrow\; dx = v\, dy + y\, dv$

$$\begin{aligned}
(vy - 2y)(v\, dy + y\, dv) + (2vy + y)\, dy &= 0 \\
y(v - 2)(v\, dy + y\, dv) + y(2v + 1)\, dy &= 0 \\
(v - 2)v\, dy + (v - 2)y\, dv + (2v + 1)\, dy &= 0 \\
((v + 2)v + (2v + 1))\, dy + (v - 2)y\, dv &= 0 \\
(v^2 + 1)\, dy &= (2 - v)y\, dv \\
\frac{dy}{y} &= \frac{2 - v}{v^2 + 1}\, dv \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \left(\frac{2}{v^2 + 1} - \frac{v}{v^2 + 1} \right) dv \\
\ln y &= 2\arctan(v) - \frac{1}{2}\ln(v^2 + 1) + C \\
\ln y &= 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \ln\sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1} + C
\end{aligned}$$

3. Resolver:

$$2xy \cdot y' = 4x^2 + 3y^2$$

Solución:La ecuación es homogénea de grado 2, ya que :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy} \;\Rightarrow\; 2xy\,dy = (4x^2 + 3y^2)\,dx$$

$*$ Sustitución: $y = ux \quad , dy = u\,dx + x\,du$

$$\begin{aligned}
(2x(ux))\,dy &= (4x^2 + 3u^2x^2)\,dx \\
(2x^2u)(u\,dx + x\,du) &= (4x^2 + 3u^2x^2)\,dx \\
(2u)(u\,dx + x\,du) &= (4 + 3u^2) \\
2u^2\,dx + 2ux\,du &= 4\,dx + 3u^2\,dx \\
2ux\,du &= 4\,dx + 3u^2\,dx - 2u^2\,dx \\
2ux\,du &= 4\,dx + u^2\,dx \\
\frac{dx}{x} &= \frac{2u\,du}{(4 + u^2)}
\end{aligned}$$

Integramos a ambos lados

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{2u\,du}{(4 + u^2)} \\
\ln x &= \ln(4 + u^2) + C \quad /e \\
x &= (4 + u^2)e^C \\
x &= \left(4 + \frac{y^2}{x^2}\right)e^C \qquad , e^C = k \\
x &= \frac{4x^2 + y^2}{x^2} \cdot k \\
\frac{x^3}{k} &= 4x^2 + y^2 \\
y &= \pm\sqrt{\frac{x^3}{k} - 4x^2}
\end{aligned}$$

5.5 Ecuaciones Exactas

La ecuación diferencial de primer orden:

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

se llama exacta si:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

El método de solución se basa en la existencia de una función potencial $f(x,y)$ con la propiedad:

$$\nabla f = (M, N)$$

Es decir:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}\,, \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Si reemplazamos esto en la ecuación general:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0$$

pero, justamente la diferencial de una función de dos variables es:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

por lo tanto, si la diferencial de una función de dos variables es cero, entonces:

$$f(x,y) = C \quad \text{que representa la solución general de la ecuación}$$

En resumen,:

$$\text{Si } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \Rightarrow \ \exists \text{ una función } f(x,y)$$

con la propiedad $\nabla f = (M, N)$ (función potencial) y la solución (implicita) de la **EDO** es la ecuación:

$$f(x,y) = C$$

Por lo tanto el método se reduce al método que ya conocemos para encontrar la función potencial del campo (conservativo) $F = (M, N)$.

Ejemplos:

1. Resolver $3x(xy-2)\,dx + (x^3 + 2y)\,dy = 0$

   Solución: es **exacta** ya que:

$$M:\ 3x(xy-2) \ \rightarrow \ \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$$

$$N:\ x^3 + 2y \ \rightarrow \ \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$$

   Para encontrar la ecuación potencial

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \ \rightarrow \ \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \ \rightarrow \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2y$$

   entonces:

$$f(x,y) = \int (3x^2y - 6x)\,dx + g(y)$$

$$f(x,y) = x^3y - 3x^2 + g'(y)$$

ahora derivando con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + g'(y) = x^3 + 2y$$

por lo tanto

$$g'(y) = 2y \;\Rightarrow\; g(y) = y^2$$

Así $f(x,y) = x^3y - 3x^2 + y^2$
luego la solución general es:

$$x^3y - 3x^2 + y^2 = C$$

2. Resolver $(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)\,dx - (x^2y + 2x)\,dy = 0$

Solución: es **exacta** ya que:

$$M:\; 2x^3 - xy^2 - 2y + 3 \;\rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y} = -2xy - 2$$

$$N:\; -(x^2y + 2x) \;\rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy - 2$$

Para encontrar la ecuación potencial

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x} = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2y + 2x)$$

entonces:

$$f(x,y) = \int (2x^3 - xy^2 - 2y + 3)\,dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} - 2yx + 3x + g'(y)$$

ahora derivando con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2y - 2x + g'(y) = -x^2y - 2x$$

por lo tanto

$$g'(y) = 0 \ \Rightarrow \ g(y) = C$$

Así $f(x,y) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2y^2}{2} - 2yx + 3x$
luego la solución general es:

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} - 2yx + 3x = C$$

5.6 Ecuación Lineal de Primer Orden

Una ecuación diferencial de primer orden se llama lineal si se puede escribir de la forma:

$$A(x)\, y' + B(x)\, y = C(x)$$

Sin embargo, la forma estándar de esta ecuación se obtiene al dividirla por $A(x)$ y escribirla de la forma:

Forma estándar

$$y' + P(x)\, y = Q(x) \tag{5.4}$$

Método de solución:

Para resolver esta ecuación se usa una función auxiliar llamada *factor integrante*, la que se define del siguiente modo:

$$\mu = e^{\int P(x)\, dx}$$

La derivada de esta función es:

$$\mu' = P(x)\, e^{\int P(x)\, dx}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (5.4) por μ se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{\int P(x)\, dx}\, y' + P(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, y &= Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}, \text{ para simplificar usamos } \mu \\ \mu\, y' + \mu'\, y &= Q(x)\, \mu \\ (\mu\, y)' &= Q(x)\, \mu \end{aligned}$$

Ahora integrando a ambos lados se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu\, y &= \int Q(x)\, \mu\, dx + C, \text{ en forma explicita se obtiene} \\ y &= = \frac{1}{e^{\int P(x)\, dx}} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)\, dx}\, dx + C \right) \end{aligned}$$

Esta fórmula (que aparece como complicada) no se debe aprender de memoria. En la práctica se realiza el proceso completo para arribar a la solución (que por lo demás es **siempre** explícita). En resumen, el método consiste en:

1. Escribir la ecuación de la forma : $y' + P(x)\, y = Q(x)$
2. Calcular la función, llamada **factor integrante**: $\mu = e^{\int P(x)}$
3. Multiplicar ambos lados por μ
4. Integrar a ambos lados (recordar que el lado izquierdo de la ecuación es la derivada de un producto)
5. Despejar y.

Ejemplo:

1. Resolver

$$\begin{aligned}
2(y-4x^2)\,dx + x\,dy &= 0 \quad / \div\, dx \\
2(y-4x^2) + x\,\frac{dy}{dx} &= 0 \\
2y - 8x^2 + x\,\frac{dy}{dx} &= 0 \\
xy' + 2y &= 8x^2 \quad / \div\, x \\
y' + \frac{2y}{x} &= 8x
\end{aligned}$$

en este caso $P(x) = 2/x$ y $Q(x) = 8x$ y el factor integrante es: $\mu = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2 \;\Rightarrow\; \mu = x^2$

Multiplicando la igualdad por este factor integrante, tenemos:

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2y}{x} &= 8x \quad / \cdot \mu = x^2 \\
x^2y' + 2xy &= 8x^3 \\
(x^2y)' &= 8x^3 \\
x^2y &= \int 8x^3\,dx \\
x^2y &= 2x^4 + C \\
y &= \frac{2x^4 + C}{x^2} \quad \rightarrow \text{ Solución general explícita}
\end{aligned}$$

2. Resolver $\quad xy' - 2y = x^2 \;\; / \cdot \frac{1}{x}$

$$y' - \frac{2}{x}\,y = x$$

- $P(x) = -\dfrac{2}{x}$
- $\displaystyle\int P(x)\,dx = \int -\frac{2}{x}\,dx = -2\int \frac{1}{x} = -2\ln|x| = \ln\frac{1}{x^2}$
- $e^{\int P(x)\,dx} = e^{\ln(\frac{1}{x^2})} = \dfrac{1}{x^2}$
- $\dfrac{d}{dx}\left[y \cdot \dfrac{1}{x^2}\right] = \dfrac{1}{x} \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{y}{x^2} = \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$
- $\dfrac{y}{x^2} = \ln|x| + C$

- $y = x^2 \ln|x| + x^2 C \;\rightarrow$ Solución general explícita

3. Resolver $\quad y' = y + e^x$

$$y' - y = e^x$$

- $P(x) = -1$
- $\displaystyle\int P(x)\,dx = -\int dx = -x$
- $\mu = e^{-x}$
- $\dfrac{d}{dx}\left[y \cdot e^{-x}\right] = e^x e^{-x} \;\Rightarrow\; ye^{-x} = \displaystyle\int 1\,dx$
- $\dfrac{y}{e^x} = x + C$
- $y = xe^x + e^x C \;\rightarrow$ Solución general explícita

5.7 Ecuación de Bernoulli

Una ecuación que se pueda escribir de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

donde n es un número real, se denomina de **Ecuación de Bernoulli**

Cuando $n = 0, 1$, una ecuación de Bernoulli es una ecuación lineal, ya que se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P(x)\,y &= Q(x) \text{ , cuando } n = 0 \\ \frac{dy}{dx} + (P(x) - Q(x))\,y &= 0 \text{ , cuando } n = 1 \end{aligned}$$

Por otro lado, cuando $n \neq 0, 1$, es posible transformar la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal. Consideremos la ecuación original y dividamos por y^n:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)\,y^{1-n} = Q(x) \tag{5.5}$$

Si consideramos la sustitución $z = y^{1-n}$,

$$z = y^{1-n} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto, si ahora multiplicamos por $(1-n)$ en ambos lados de la ecuación (5.5) , obtenemos:

$$\begin{aligned}(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)\,P(x)\,y^{1-n} &= (1-n)\,Q(x)\\ z' + (1-n)\,P(x)\,z &= (1-n)\,Q(x)\end{aligned}$$

Lo que resulta ser una ecuación lineal en la variable z. Luego, el proceso se continua con el método de resolución de ecuaciones lineales.

Ejemplos:

1. Resuelva $y' = \dfrac{2y}{x} - x^2y^2$

   P1) Escribir la ecuación como: $y' - \dfrac{2y}{x} = -x^2y^2$

   P2) Entonces tenemos una ecuación de Bernoulli con $n = 2$

   P3) Hacemos la sustitución $z = y^{1-n} = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$

   P4) $\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx} \qquad \left(\dfrac{dy}{dx} = -y^2\,\dfrac{dz}{dx}\right)$

   P5) Luego, $-y^2\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{2}{x}zy^2 = -x^2y^2 \;\rightarrow\; y = y^2z$

   P6) Ecuación lineal en su forma estándar $\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{2}{x}z = x^2$

   P7) El factor integrante es $e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x} = x^2$

   P8) Entonces $\dfrac{d}{dx}(x^2z) = x^4$ ó $z = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x^5}{5} + C\right)$

   P9) Como $z = \dfrac{1}{y}$, tenemos

   $$y = \frac{x^2}{\left(\frac{x^5}{5} + C\right)} \;\rightarrow\; \text{Solución general}$$

   (También, no hay que olvidar que $y = 0$ es solución de la ecuación)

2. Resolver $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$

   P1) Ecuación de Bernoulli con $n = -3$

   P3) realizemos la sustitución $z = y^{1-n} = y^{1-(-3)} = y^4$

   P4) $\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 4y^3\dfrac{dy}{dx} \qquad \left(\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4y^3}\dfrac{dz}{dx}\right)$

   P5) Luego, $4y^3y' + 4y^4x = 4xe^{-x^2} \;\rightarrow\; y = y^4z$

   P6) Ecuación lineal en su forma estándar $\dfrac{dz}{dx} + 4x\,z = 4xe^{-x^2}$

   P7) El factor integrante es $e^{\int 4x\,dx} = e^{2x^2}$

   P8) Entonces $\dfrac{d}{dx}(e^{2x^2}z) = 4xe^{-x^2}e^{2x^2}$ ó $z \cdot e^{2x^2} = 2e^{x^2} + C$

   P9) Como $z = \dfrac{1}{y}$, tenemos

$$y^4 = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2} \;\rightarrow\; \text{Solución general}$$

5.8 Ejercicios de Ecuaciones diferenciales de primer orden (Capítulo V)

1. Resuelva la siguiente ecuación: $e^{2y}\,dx + 2(xe^{2y} - y)\,dy = 0$

   (a) Como una ecuación exacta

   (b) Como una ecuación lineal de primer orden

2. Encuentre la solución de la ecuación diferencial

$$(2x+3)y' = y + (2x+3)^{1/2}$$

   que pase por el punto $(-1, 0)$

3. Resuelva la ecuación diferencial

$$y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0$$

4. Encuentre la solución explícita de la ecuación diferencial
$$2xyy' = 4x^2 + 3y^2$$

5. Resuelva el problema de valor inicial
$$3y(x^2 - 1\,)dx + (x^3 + 8y - 3x)\,dy = 0$$
donde $y = 1$ cuando $x = 0$.

6. Encuentre, en forma explícita, la solución general de la ecuación
$$xy' + 6y = 3xy^{4/3}$$

7. Resuelva el problema de valor inicial
$$2xyy' = 4x^2 + 3y^2$$
con $y(1) = 2$.

8. Resuelva la ecuación diferencial
$$xy' - y = x^k y^n$$
Para esto considere separadamente el caso $n \neq 1$ y $k \neq 0$ del caso $n = 1$ y $k = 0$.

9. Encuentre en forma explícita la solución de la ecuación
$$2xyy' = y^2 - 2x^3$$
que pasa por el punto $(1, 2)$

10. Resolver el problema de valor inicial
$$3y(x^2 - 1\,)dx + (x^3 + 8y - 3x)\,dy = 0$$
donde $y = 1$ cuando $x = 0$.

11. Encuentre la solución general de la ecuación:
$$x^2y' = 4x^2 + 7xy + 2y^2$$

12. Sean a, b, n constantes. Calcular en forma explícita la solución general de la ecuación diferencial
$$(x+a)y' = bx - ny$$
considerando todos los posibles valores de n.

13. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial
$$2xy^2y' = y^3 - 2x^3$$

14. Resuelva el problema de valor inicial
$$(3x^2 - 2y^2)y' = 2xy$$
con $y(0) = -1$.

15. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial
$$6x^2dy - y(2y^3 + x)dx = 0$$

16. Encuentre la solución general de la ecuación
$$x^2(y' - e^{y/x}) = xy$$

17. Encuentre la solución de la ecuación diferencial
$$x\,dy - (6y + 3xy^{4/3})\,dx = 0$$
que pasa por el punto $(1, 1/8)$

18. Demuestre que la solución de la ecuación diferencial
$$\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$$
es una recta (**Indicación:** Encuentre en forma explícita la solución).

Capítulo 6

Solución de Pruebas anteriores

Solución de la Prueba 3
6 de julio de 2004

1. (2 pts) Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial

$$y'x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

que satisface $y(-1) = 1$

Solución: Dividimos la ecuación por x^2 para obtener:

$$\begin{aligned} y' + \frac{2}{x}y + \frac{y^2}{x^2} &= 0 \\ y' + \frac{2}{x}y &= -\frac{y^2}{x^2} \end{aligned}$$

Lo que representa una ecuación de Bernoulli, con $n = 2$. Multiplicando esta última ecuación por y^{-2} y por -1 obtenemos:

$$-y^{-2}y' - \frac{2}{x}y^{-1} = \frac{1}{x^2}$$

Ahora, sustituyendo $z = y^{-1}$ obtenemos $z' = -y^{-2}y'$, con lo cual obtenemos una ecuación lineal en z, a saber:

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$$

. Esta ecuación tiene como factor integrante a la función $u = x^{-2}$. Multiplicando por este factor, el lado izquierdo de la ecuación se transforma en la derivada de un producto:

$$(x^{-2}z)' = \frac{1}{x^4}$$

Integrando a ambos lados con respecto a x obtenemos:

$$\begin{aligned} x^{-2}z &= -\frac{1}{3}x^{-3} + c \\ z &= -\frac{1}{3}x^{-1} + cx^2 \\ \frac{1}{y} &= -\frac{1}{3}x^{-1} + cx^2 \\ y &= \frac{3x}{3cx^3 - 1} \end{aligned}$$

Al incorporar la condición $y(-1) = 1$ obtenemos $c = 2/3$ de modo que

$$y = \frac{3x}{2x^3 - 1}$$

2. (2 pts) Calcular la integral de línea

$$\int_C (2xy + y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$$

donde C es la curva $\lambda(t) = (t, \sin t)$, con $t \in [0, \pi/2]$

Solución: El campo vectorial es conservativo, puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$. Buscamos entonces una función potencial f, a partir de la ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 \tag{6.1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x+y)^2 \tag{6.2}$$

Integrando la igualdad (6.1) con respecto a x se obtiene:

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 + g(y)$$

Y luego derivando esta última con respecto a y, y usando la igualdad (6.2) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 2xy + g'(y)\\ &= x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

Por lo que $g(y) = y^3/3$, lo que nos da como función potencial $f(x,y) = x^2y + xy^2 + y^3/3$. Ahora, la integral de línea se puede calcular simplemente evaluando esta función potencial en los puntos extremos de la curva. Estos puntos son: $\lambda(0) = (0,0)$ y $\lambda(\pi/2) = (\pi/2, 1)$.

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_C (2xy + y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy &= f(\pi/2, 1) - f(0,0)\\ &= \pi^2/4 + \pi/2 + 1/3\end{aligned}$$

3. (2 pts) Calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (3x^2y + y^3, 3y^3 + y^2)$ sobre la curva $\lambda(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

   Solución: En este caso podemos usar el Teorema de Green, dado que la curva es cerrada y está orientada positivamente (círculo de radio 2 centrado en el origen). Entonces, si llamamos I a la integral de línea, tenemos,

$$\begin{aligned}I &= \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA\\ &= \int_R\!\!\int -\left(3x^2 + 3y^2\right)\,dA\end{aligned}$$

donde R es la región del plano encerrada por este círculo. Esta integral doble la calculamos usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
-\int_R\int \left(3x^2+3y^2\right)\,dA &= -\int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2r\,dr\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} 3/4(16)\,d\theta \\
&= -24\pi
\end{aligned}$$

Solución Prueba Opcional
13 de julio de 2004

1. (2 pts) Calcular el volumen del sólido acotado por las superficies

$$z = 3x^2 + 3y^2, \quad y = 9 - x^2, \quad y = -2, \quad x = 0 \text{ y } z = 0$$

.

Solución: La superficie techo es el paraboloide $z = 3x^2 + 3y^2$, el piso es el plano $z = 0$ y la región de integración está definida por:

$$R = \left\{ (x, y) \mid -2 \leq y \leq 9 - x^2,\ 0 \leq x \leq \sqrt{11} \right\}$$

Por lo tanto, el volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{11}} \int_{-2}^{9-x^2} (3x^2 + 3y^2)\, dy\, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{11}} 3x^2 y + y^3]_{-2}^{9-x^2} \\ &= \int_0^{\sqrt{11}} [3x^2(9 - x^2) + (9 - x^2)^3] - [-6x^2 - 8]\, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{11}} [737 - 210x^2 + 24x^4 - x^6]\, dx \\ &= \frac{12.518}{35}\sqrt{11} \end{aligned}$$

2. (2 pts) Calcular la integral triple

$$\int\int_{\Omega}\int \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$$

donde Ω es el sólido sobre el cono $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Solución: El sólido se puede describir en coordenas esféricas de siguiente modo:

$$\Omega = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi/6\}$$

La última desigualdad para ϕ se obtiene de la igualdad $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ en coordenadas esféricas ($\tan^2 \phi = \frac{1}{3}$). De este modo, podemos calcular la integral triple, que llamaremos I, como una integral iterada:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\pi/6} \rho\rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3(-\cos\pi/6+\cos 0)\, d\rho\, d\theta \\
&= (1-\frac{\sqrt{3}}{2})8\pi
\end{aligned}
$$

3. (2 pts) Calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (x^2y - y, xy^2 - x)$ sobre la curva que resulta al unir las gráficas de la curva $y = x^2 - 1$, para $x \in [0,2]$, con el segmento que une el punto $(2,3)$ con el punto $(3,0)$ y con el segmento que une el punto $(3,0)$ con el punto $(5,0)$.

   Solución: Si llamamos C a la curva total, esta se puede escribir como $C = C_1+C_2+C_3$ donde C_1 es la gráfica de la parábola, C_2 es el primer segmento y C_3 es el otro. Por lo tanto, la integral de línea se descompone en una suma de integrales de línea, a saber:

$$
\int_C F\, d\lambda \;=\; \int_{C_1} F\, d\lambda + \int_{C_2} F\, d\lambda + \int_{C_2} F\, d\lambda
$$

   Ahora calculamos cada integral por separado.

   La parametrización de la curva C_1 está dada por $\lambda(t) = (t, t^2-1)$, con $0 \leq t \leq 1$.

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} F\,\lambda &= \int_0^2 \left([(t^2(t^2-1)-(t^2-1)] - [t(t^2-1)^2 - t]\right)\, dt \\
&= t^4 - 2t^2 + 1 - t^5 + 2t^3]_0^2 \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

   La parametrización de la curva C_2 está dada por $\lambda(t) = (2+t, 3-3t)$, con $0 \leq t \leq 1$.

$$
\begin{aligned}
\int_{C_2} F\,\lambda &= \int_0^1 \left([(2+t)^2(3-3t) - (3-3t)] + [(2+t)(3-3t)^2 - (2+t)]\right)\, dt \\
&= 25 - 9t^2 + 6t^3 - 25t]_0^1 \\
&= 11
\end{aligned}
$$

La parametrización de la curva C_3 está dada por $\lambda(t) = (3 + 2t, 0)$, con $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} \int_{C_3} F\,\lambda &= \int_0^1 (0)\ dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, sumando los resultados obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_C F\,d\lambda &= \frac{2}{5} + 11 + 0 \\ &= \frac{57}{5} \end{aligned}$$

Solución de la Prueba 1
23 de agsoto de 2004

1. (2 pts) Demostrar que
$$\int_R\int x\,dA = 2$$
donde R es la región achurada de la Figura 1.

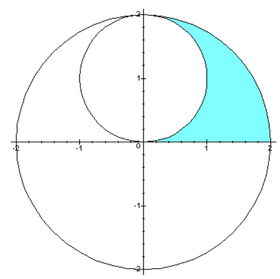


Figura 1

Solución:

Las ecuaciones de los círculos son:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4 \\ x^2+(y-1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

La región R es una región de tipo II, que se puede describir como:

$$R = \{(x,y)\in\mathbb{R}\,|\,0\le y\le 2, \quad \sqrt{1-(y-1)^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}\}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_R\int x\,dA &= \int_0^2\int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{4-y^2}\}} x\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}\Big]_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\right) dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}\big((4-y^2)-(1-(y-1)^2)\big)\,dy \\ &= \int_0^2 (2-y)\,dy \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. (2 pts) Comprobar la igualdad:

$$\int_0^1 \int_{x-2}^{-1+\sqrt{1-x^2}} xy^2 \; dy\, dx = \frac{5}{12}$$

(Indicación: La Figura 2 lo puede ayudar en al análisis)

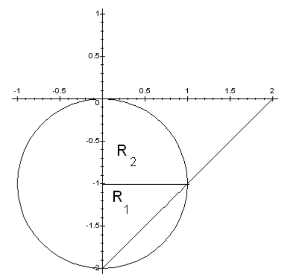


Figura 2

Solución:

La integral iterada, planteada como está, presenta dificultades técnicas para su resolución. Para simplificar este problema, describiremos la región de integración como la unión de dos regions de tipo II (como se muestra en la Figura 2). A saber:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \,|\, -2 \le y \le -1, \quad 0 \le x \le y+2\} \\ R_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \,|\, -1 \le y \le 0, \quad 0 \le x \le \sqrt{-2y-y^2}\} \end{aligned}$$

Así, la integral iterada la podemos reescribir como la suma de dos integrales iteradas:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x-2}^{-1+\sqrt{1-x^2}} xy^2 \; dy\, dx &= \int_R \int xy^2 \, dA \\ &= \int_{R_1} \int xy^2 \, dA + \int_{R_2} \int xy^2 \, dA \\ &= \int_{-2}^{-1} \int_0^{y+2} xy^2 \, dx\, dy + \int_{-1}^{0} \int_0^{\sqrt{-2y-y^2}} xy^2 \, dx\, dy \\ &= \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{2}y^4 + 2y^3 + 2y^2 \right) dy + \int_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{2}y^4 - y^3 \right) dy \\ &= \left. \frac{1}{10}y^5 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{2}{3}y^3 \right]_{-2}^{-1} \left. -\frac{1}{10}y^5 - \frac{1}{4}y^4 \right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{4}{15} + \frac{3}{20} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

3. (a) (1 pt) Transformar la ecuación, dada en coordenadas polares, a una en coordenadas cartesianas (rectangulares).

$$r = \frac{6}{2 - 3\cos\theta}$$

(b) (1 pt) Encontrar una representación polar de los puntos Q y S dados en coordenadas cartesianas: $Q = (-1, \sqrt{3})$ y $S = (1, -32)$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned} r &= \frac{6}{2 - 3\cos\theta} \\ 2r - 3r\cos\theta &= 6 \\ 2r - 3x &= 6 \\ 2r &= 6 + 3x \\ 4r^2 &= (6 + 3x)^2 \\ 4(x^2 + y^2) &= (6 + 3x)^2 \end{aligned}$$

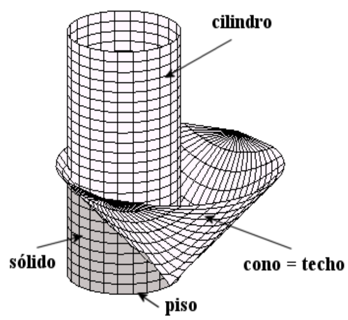
(b) Sabemos, a partir de la relaciones entre las coordenadas que para el caso de Q se tiene $r = \sqrt{1+3}$ y $\theta = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi$. Del mismo modo, para S se tiene $r = \sqrt{1 + 32^2}$ y $\theta = \arctan(-32)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} Q &= (4, 2\pi/3) \\ R &= (\sqrt{1025}, -1.539556493) \end{aligned}$$

Solución Prueba 2
12 de Octubre de 2004

1. (2 pts) Demostrar que el volumen del sólido dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y entre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano xy es $\dfrac{32}{9}$.

   Solución:



El techo del sólido es el cono y el piso es el plano xy y la región de integración R es el círculo $x^2 + y^2 = 2y$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} V &= \int\int_R (\text{techo - piso})\, dA \\ &= \int\int_R \sqrt{x^2+y^2}\, dA \end{aligned}$$

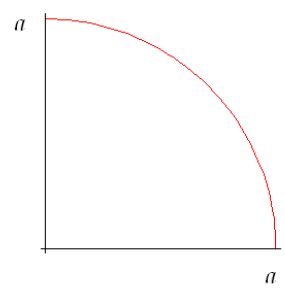
Este círculo se expresa en coordenadas polares como $r = 2\sin\theta$. Así,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big[_0^{2\sin\theta}\, d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta \\ &= -\frac{8}{3}\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big[_0^{\pi} \\ &= \frac{32}{9} \end{aligned}$$

2. (2 pts) Demostrar que

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Solución: La región de integración es el cuarto de círculo ilustrado en la figura. Mostraremos dos estrategias de solución.



(a) En coordenadas rectangulares, revirtiendo el orden de integración, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a x^2 \Big[_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a (a^2-y^2)\,dy \\
&= \frac{1}{2}(a^2y - y^3/3)\Big[_0^a \\
&= \frac{a^3}{3}
\end{aligned}$$

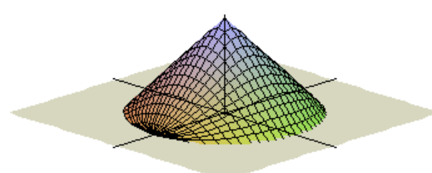
(b) En coordenadas polares, la región de integración es el cuarto de círculo dado por $R = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le \pi/2, \quad 0 \le r \le a\}$. Entonces la integral doble se puede escribir como:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^a r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta$$

Luego, calculamos esta integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_0^a r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta &= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^a r^2\,dr\\ &= \sin\theta\Big[_0^{\pi/2}\quad \frac{r^3}{3}\Big[_0^a\\ &= \frac{a^3}{3}\end{aligned}$$

3. (2 pts) Considerar el cono, que se ilustra en la figura, acotado por arriba por la superficie $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ y por abajo por el plano xy. Si la densidad en el punto (x, y, z) es la distancia de este punto al plano xy, demostrar que el centro de masa de este sólido es $(0, 0, \frac{2}{5})$.



Solución: La densidad en el punto (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = z$. de modo que la masa del cono es:

$$m = \int\int\int_\Omega z\,dV$$

El cono es el sólido cuyo techo es el mismo cono y el piso el plano xy, sobre la región R dada por la intersección del cono con el plano xy, esto es el círculo de radio 1 centrado en el origen.

Así, la masa es:

$$m = \int\int_R \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\right) dA$$

En coordenadas cilíndricas esta integral triple se puede representar por:

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} z\,dz\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{z^2}{2}\Big[_0^{1-r} r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r-2r^2+r^3\right)\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-2\frac{r^3}{3}+\frac{r^4}{4}\right)\Big[_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{12}
\end{aligned}
$$

Ahora calculamos las coordenadas $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ mediante las fórmulas clásicas. Veamos primero $\bar{x}$.

$$
\begin{aligned}
M_{yz} &= \int\int\int_\Omega xz\,dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} (r\cos\theta)\,z\,dz\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos\theta)\,\frac{z^2}{2}\Big[_0^{1-r}\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos\theta\left(r^2-2r^3+r^4\right)\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(\frac{r^3}{3}-2\frac{r^4}{4}+\frac{r^5}{5}\right)\Big[_0^1\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\,d\theta \\
&= \frac{1}{60}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{60}\sin\theta\Big[_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Del mismo modo $M_{xz}=0$ (esto es claro por la simetría del cono). Calculamos ahora $\bar{z}$, para lo cual debemos calcular primero M_{xy}.

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \int\int\int_{\Omega} z^2\, dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} z^2\, dz\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,\frac{z^3}{3}\Big[_0^{1-r}\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r-3r^2+3r^3-r^4\right)\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-3\frac{r^3}{3}+3\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\right)\Big[_0^1\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{60}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{\pi}{30}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi/30}{\pi/12} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0.4$$